

Eugeniusz Wojciechowski

Rachunek Lambeka i ontologia Elementarna*

Rachunek Lambeka jest systemem gramatyki kategoryjnej dla praw redukcji typów syntaktycznych (Lambek 1958). System ten jest algebraicznym rozwinięciem koncepcji gramatyki kategoryjnej zaproponowanej przez Kazimierza Ajdukiewicza (zob. Ajdukiewicz 1935), wzbogaconej o ideę notacyjnego odróżniania lewostronności i prawostronności argumentów wyrażeń funkcyjnych Yeshui Bar-Hillela (zob. Bar-Hillel 1953).

1. Rachunek Lambeka

Przedstawimy język systemu Lambeka.

Słownik. Na słownik tego języka składają się:

- (1) Zmienne nazwowe, oznaczające typy syntaktyczne ($x, y, z, \dots; X, Y, Z, \dots$),
- (2) Stała nazwowa, oznaczająca typ pusty (e),
- (2) Funktory: *przepisywania* ($\sqsubset$), *konkatenacji* ($\bullet$), *lewostronnego* ($\backslash$) i *prawostronnego* ($/$) *dzielenia*¹.

Indukcyjnie wprowadzimy pojęcia terminu (nazwy typu syntaktycznego) i formuły systemu.

Terminy.

- (1) Wszystkie zmienne nazwowe są terminami.

¹ W literaturze funktor konkatenacji jest zazwyczaj opuszczany, a funktor przepisywania jest oznaczany przy pomocy strzałki ($\rightarrow$). Przyjęta tu symbolika nawiązuje do przedstawionej dalej interpretacji tego systemu w rachunku nazw. Naturalność tej interpretacji jest widoczna w jednym ze sposobów czytania formuły $x \rightarrow y$ - „wszystkie wyrażenia typu x są (również) typu y ”.

* Praca ta była referowana podczas Częstochowskich Warsztatów Logiczno-Filozoficznych (wrzesień 2003).

(2) Stała nazwowa e jest terminem.

(3) Jeżeli s i t są terminami, to $s \bullet t, s \backslash t$ i s / t są też terminami.

Formuły. Jeżeli s i t są terminami, to $s \sqsubset t$ jest formułą systemu.

Konwencja. Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy następującą konwencję:

(1) Omijamy stałą nazwową e .

(2) Omijamy jedno wystąpienie symbolu konkatenacji przy lewostronnej lub prawostronnej konkatenacji dowolnego terminu ze stałą nazwową; tj. dla dowolnych terminów s i t (różnych od e , z uwagi na omijanie pustej stałej nazwowej) mamy: $\bullet s = s$, $s \bullet = s$ i $s \bullet \bullet t = s \bullet t$.

(3) Dla uniknięcia wieloznaczności przyjmujemy, że ciąg funktorów $d, \bullet, \sqsubset$ (gdzie d reprezentuje funktor lewostronnego lub prawostronnego dzielenia) oddaje stopień wiązania tych funktorów, od najsilniej do najsłabiej wiążącego.

Rachunek Lambeka (**RL**) składa się z aksjomatu²:

$$A \sqsubset \quad x \sqsubset x$$

oraz reguł operowania funktorami *prawego* i *lewego dzielenia* oraz reguły *cięcia*:

$$A / \quad \frac{X \sqsubset x / y \wedge Y \sqsubset y}{X \bullet Y \sqsubset x}$$

$$A \backslash \quad \frac{X \sqsubset y \wedge Y \sqsubset y \backslash x}{X \bullet Y \sqsubset x}$$

$$L / \quad \frac{X \bullet y \sqsubset x}{X \sqsubset x / y}$$

² Por. (Buszkowski 1989, s. 162) oraz (Kandulski 1995, s. 391 i nast.). Zob. też aksjomatykę podaną przez Kołowską-Gawiejnowicz (2000, s. 170). Funktor konkatenacji w aksjomatyce przedstawionej w ostatniej z cytowanych prac występuje jawnie wraz z prawami łączności dla niego. Lambek przyjmował w swojej pierwszej pracy (1958) aksjomatycznie prawa łączności dla funktora konkatenacji a później z nich zrezygnował (1961). Zob. również w tej sprawie pracę Lehrbergera (1974, s. 41 i nast.).

$$\begin{array}{l} L\backslash \quad \frac{y \bullet X \sqsubset x}{X \sqsubset y \backslash x} \\ \\ \text{Cut} \quad \frac{X \bullet y \bullet Z \sqsubset x \wedge Y \sqsubset y}{X \bullet Y \bullet Z \sqsubset x} \end{array}$$

2. System GK

Zaproponujemy rachunek gramatyki kategoryjnej **GK**, zbudowany metodą założeniową. Język tego rachunku jest rozszerzeniem języka systemu **RL** o funktor epsilonowy (ϵ). Dla funktora epsilonowego przyjmujemy dwie reguły³:

$$\begin{array}{l} R1 \quad \frac{x \epsilon y}{X \epsilon x} \\ \\ O\epsilon \quad \frac{x \epsilon y}{x \sqsubset y} \end{array}$$

Reguła wprowadzania funktora słabej inkluzji ma postać:

$$I\sqsubset \quad \frac{z \epsilon x \rightarrow z \epsilon y}{x \sqsubset y}$$

gdzie zmienna z , nie występuje w założeniach dowodu.

Przyjmujemy również reguły opuszczania/wprowadzania dla funktorów prawego i lewego dzielenia oraz regułę cięcia:

$$O/ \quad \frac{x \epsilon y / z \bullet z}{x \epsilon y}$$

³ Pierwsza i trzecia z przyjętych tu reguł występują w bezkwantyfikatorowym rachunku nazw Ludwika Borkowskiego (1980).

$$\text{I/} \quad \frac{x \varepsilon x \wedge x \bullet z \subset y}{x \varepsilon y / z}$$

$$\text{O\} \quad \frac{x \varepsilon y \bullet y \setminus z}{x \varepsilon z}$$

$$\text{I\} \quad \frac{x \varepsilon x \wedge y \bullet x \subset z}{x \varepsilon y \setminus z}$$

$$\text{RC} \quad \frac{x \varepsilon X \bullet Y \bullet Z \wedge Y \subset y}{x \varepsilon X \bullet y \bullet Z}$$

Szczególnymi przypadkami reguły cięcia, tj. regułami wtórnymi, które to będziemy też tak samo oznaczać są:

$$\frac{x \varepsilon Y \bullet Z \wedge Y \subset y}{x \varepsilon y \bullet Z} \quad \frac{x \varepsilon Y \bullet Z \wedge Z \subset z}{x \varepsilon Y \bullet z} \quad \frac{x \varepsilon Y \wedge Y \subset y}{x \varepsilon y} \quad \frac{x \varepsilon Y \bullet Z \wedge Y \subset y \wedge Z \subset z}{x \varepsilon y \bullet z}$$

Regułami wtórnymi są tu również reguła opuszczania dla funktora inkluzji ($\text{O}\subset$) i reguła przechodniości dla funktora epsilonowego (R2):

$$\text{O}\subset \quad \frac{x \subset y}{z \varepsilon x \rightarrow z \varepsilon y}$$

Der.

$$\begin{array}{ll} \vdots & \\ (1) & x \subset y \quad [z] \\ (2) & z \varepsilon x \quad [z] \\ (3) & z \varepsilon y \quad [1, 2 \times \text{RC}] \end{array}$$

R2	$\frac{x\epsilon y \wedge y\epsilon z}{x\epsilon z}$	
	<i>Der.</i>	
	$\vdash$	
(1)	$x\epsilon y$	[z]
(2)	$y\epsilon z$	[z]
(3)	$y\subset z$	[2×Oε]
(4)	$x\epsilon z$	[1,3×RC]

Udowodnimy twierdzenie:

Twierdzenie 1 *System **RL** zawiera się inferencyjnie w **GK**.*

W dowodzie tego twierdzenia wystarczy pokazać, że aksjomat $A\subset$ i reguły specyficzne rachunku Lambeka ($A/, A\backslash, L/, L\backslash, \text{Cut}$) są odpowiednio tezą i regułami wtórnymi systemu **GK**.

Na gruncie **GK** otrzymujemy:

T1	$x\subset x$	(= $A\subset$)	[KRZ , $I\subset$]
----	--------------	-----------------	-----------------------------

A/	$\frac{X\subset x/y \wedge Y\subset y}{X\bullet Y\subset x}$	
	<i>Der.</i>	
	$\vdash$	
(1)	$X\subset x/y$	[z]
(2)	$Y\subset y$	[z]
(3a)	$z\epsilon X\bullet Y$	[zd1]
(3b)	$z\epsilon x/y\bullet y$	[1,2,3a×RC]
(3c)	$z\epsilon x$	[3b×O/]
(3)	$z\epsilon X\bullet Y \rightarrow z\epsilon x$	[3a → 3c]
(4)	$X\bullet Y\subset x$	[3×I $\subset$]

A\	$\frac{X\subset y \wedge Y\subset y\backslash x}{X\bullet Y\subset x}$	
----	--	--

	<i>Der.</i>	
	$\vdash$	
(1)	$X \sqsubset y$	[z]
(2)	$Y \sqsubset y \backslash x$	[z]
(3a)	$z \in X \bullet Y$	[zd1]
(3b)	$z \in y \bullet y \backslash x$	[1,2,3a $\times$ RC]
(3c)	$z \in x$	[3b $\times$ O\]
(3)	$z \in X \bullet Y \rightarrow z \in x$	[3a $\rightarrow$ 3c]
(4)	$X \bullet Y \sqsubset x$	[3 $\times$ I $\sqsubset$]
	$X \bullet y \sqsubset x$	
L/	$\frac{}{X \sqsubset x/y}$	
	<i>Der.</i>	
	$\vdash$	
(1)	$X \bullet y \sqsubset x$	[z]
(2a)	$z \in X$	[zd1]
(2b)	$z \in z$	[2a $\times$ R1]
(2ca)	$u \in z \bullet y$	[zd2]
(2cb)	$z \sqsubset X$	[2a $\times$ O $\in$]
(2cc)	$u \in X \bullet y$	[2ca,2cb $\times$ RC]
(2cd)	$u \in X \bullet y \rightarrow u \in x$	[1 $\times$ O $\sqsubset$]
(2ce)	$u \in x$	[2cc,2cd $\times$ MP]
(2c)	$u \in z \bullet y \rightarrow u \in x$	[2ca $\rightarrow$ 2ce]
(2d)	$z \bullet y \sqsubset x$	[2c $\times$ I $\sqsubset$]
(2e)	$z \in x/y$	[2b,2d $\times$ I/]
(2)	$z \in X \rightarrow z \in x/y$	[2a $\rightarrow$ 2e]
(3)	$X \sqsubset x/y$	[2 $\times$ I $\sqsubset$]
	$y \bullet X \sqsubset x$	
L\	$\frac{}{X \sqsubset y \backslash x}$	
	<i>Der.</i>	
	$\vdash$	
(1)	$y \bullet X \sqsubset x$	[z]
(2a)	$z \in X$	[zd1]
(2b)	$z \in z$	[2a $\times$ R1]
(2ca)	$u \in y \bullet z$	[zd2]

(2cb)	$z \subset X$	[2a×Oε]
(2cc)	$u \varepsilon y \bullet X$	[2ca,2cb×RC]
(2cd)	$u \varepsilon y \bullet X \rightarrow u \varepsilon x$	[1×O⊂]
(2ce)	$u \varepsilon x$	[2cc,2cd×MP]
(2c)	$u \varepsilon y \bullet z \rightarrow u \varepsilon x$	[2ca → 2ce]
(2d)	$y \bullet z \subset x$	[2c×I⊂]
(2e)	$z \varepsilon y \backslash x$	[2b,2d×I\]
(2)	$z \varepsilon X \rightarrow z \varepsilon y \backslash x$	[2a → 2e]
(3)	$X \subset y \backslash x$	[2×I⊂]
$X \bullet y \bullet Z \subset x \wedge Y \subset y$		
Cut		
	$X \bullet Y \bullet Z \subset x$	
<i>Der.</i>		
	$\vdash$	
(1)	$X \bullet y \bullet Z \subset x$	[z]
(2)	$Y \subset y$	[z]
(3a)	$z \varepsilon X \bullet Y \bullet Z$	[zd1]
(3b)	$z \varepsilon X \bullet y \bullet Z$	[2,3a×RC]
(3c)	$z \varepsilon X \bullet y \bullet Z \rightarrow z \varepsilon x$	[1×O⊂]
(3d)	$z \varepsilon x$	[3b,3c×MP]
(3)	$z \varepsilon X \bullet Y \bullet Z \rightarrow z \varepsilon x$	[3a → 3d]
(4)	$X \bullet Y \bullet Z \subset x$	[3×I⊂]

Dowód tego twierdzenia został zatem zakończony.

3. Interpretacja w ontologii elementarnej

Niech **RN** oznacza pewien rachunek nazw, zbudowany metodą założeniową, zawierający fragment ontologii elementarnej Leśniewskiego⁴. Funktor epsilonowy scharakteryzujemy następująco:

- R1 $x \varepsilon y / x \varepsilon x$
 R2 $x \varepsilon y \wedge y \varepsilon z / x \varepsilon z$

⁴ Konstrukcja ta jest fragmentem bezkwantyfikatorowego rachunku nazw Ludwika Borkowskiego (1980 i 1993).

$$R3 \quad x\epsilon y \wedge y\epsilon z / y\epsilon x$$

Z kolei reguły opuszczania (jak też dołączania) funktorów istnienia, jedyności, słabej inkluzji i inkluzji cząstkowej mają tu postać:

$$\begin{aligned} Oex & \quad ex(x)/x^* \epsilon x \\ Iex & \quad x\epsilon y / ex(y) \\ Osol & \quad sol(x)/z\epsilon x \wedge u\epsilon x \rightarrow z\epsilon u \\ Isol & \quad z\epsilon x \wedge u\epsilon x \rightarrow z\epsilon u / sol(x) \\ OC & \quad x\subset y / z\epsilon x \rightarrow z\epsilon y \\ IC & \quad z\epsilon x \rightarrow z\epsilon y / x\subset y \\ O\Delta & \quad x\Delta y / x^* \epsilon x \wedge x^* \epsilon y \\ I\Delta & \quad z\epsilon x \wedge z\epsilon y / x\Delta y \end{aligned}$$

gdzie x^* jest stałą nazwową, nie powtarzającą się w wierszach w przypadku zastosowania tej reguły (więcej niż jeden raz) w dowodzie. Zmienna z zaś, nie występuje w założeniach dowodu.

Stałe nazwowe *przedmiotu* (V) i *przedmiotu sprzecznego* (Δ) oraz funktory *negacji nazwowej* (n), *iloczynu nazwowego* ($\cap$) i *sumy nazwowej* ($\cup$) są wprowadzone definicyjnie:

$$\begin{aligned} DV & \quad x\epsilon V \leftrightarrow x\epsilon x \\ D\Delta & \quad x\epsilon \Delta \leftrightarrow x\epsilon x \wedge \neg x\epsilon x \\ Dn & \quad x\epsilon ny \leftrightarrow x\epsilon x \wedge \neg x\epsilon y \\ D\cap & \quad x\epsilon y \cap z \leftrightarrow x\epsilon y \wedge x\epsilon z \\ D\cup & \quad x\epsilon y \cup z \leftrightarrow x\epsilon y \vee x\epsilon z \end{aligned}$$

Definicyjnie wprowadzimy też funktory prawego i lewego dzielenia:

$$\begin{aligned} D/ & \quad x\epsilon y / z \leftrightarrow x\epsilon x \wedge x\cap z \subset y \\ D\backslash & \quad x\epsilon y \backslash z \leftrightarrow x\epsilon x \wedge x\cap y \subset z \end{aligned}$$

Podobnie jak wcześniej przyjmiemy konwencję, że ciąg funktorów $d, \cap, c$ (gdzie d reprezentuje funktor lewostronnego lub prawostronnego dzielenia a c funktor epsilonowy lub funktor inkluzji) oddaje stopień wiązania tych funktorów, od najsilniej do najsłabiej wiążącego.

Pokażemy, że system **GK** ma interpretację w **RN**, co będzie zarazem dowodem jego niesprzeczności.

Niech symbole s i t reprezentują dowolne terminy języka **GK**, a Φ i Ψ są zmiennymi przebiegającymi zbiór formuł (atomowych i złożonych) tego języka.

Udowodnimy twierdzenie:

Twierdzenie 2. *System **GK** zawiera się inferencyjnie w **RN** przy następującej regule translacji RT:*

$$\begin{aligned}
 \varphi(x \varepsilon s \bullet t) &= x \varepsilon \varphi(s) \cap \varphi(t) \\
 \varphi(x \varepsilon t) &= x \varepsilon \varphi(t) \\
 \varphi(s \sqsubset t) &= \varphi(s) \sqsubset \varphi(t) \\
 \varphi(s/t) &= s/t \\
 \varphi(s \setminus t) &= s \setminus t \\
 \varphi(s \sqsubset t) &= s \sqsubset t \\
 \varphi(e) &= V \\
 \varphi(t) &= t \\
 \varphi(\neg \Phi) &= \neg \varphi(\Phi) \\
 \varphi(\Phi \S \Psi) &= \varphi(\Phi) \S \varphi(\Psi) \text{ gdzie } \S \text{ jest dowolnym} \\
 &\text{spójnikiem zdaniowym.}
 \end{aligned}$$

Z uwagi na to, że reguły R1 i I $\subset$ są wspólne obu konstrukcjom dowód tego twierdzenia będzie polegał na pokazaniu, że φ -odpowiedniki pozostałych reguł (O ε , O/, I/, O\, I/, RC) systemu **GK** są regułami wtórnymi systemu **RN**.

Istotnie, φ -odpowiedniki tych reguł są regułami wtórnymi **RN**:

$$\varphi O \varepsilon \quad \varphi \frac{x \varepsilon y}{x \sqsubset y}$$

Der.

	$\vdash$	
(1)	$\varphi(x \varepsilon y)$	[z]
(2)	$x \varepsilon y$	[1 $\times$ RT]
(3a)	$z \varepsilon x$	[zd1]
(3b)	$z \varepsilon y$	[2,3a $\times$ R2]
(3)	$z \varepsilon x \rightarrow z \varepsilon y$	[3a $\rightarrow$ 3b]
(4)	$x \sqsubset y$	[3 $\times$ I $\subset$]
(5)	$\varphi(x \sqsubset y)$	[4 $\times$ RT]

$\varphi O/$	$\varphi \frac{x\epsilon y/z \bullet z}{x\epsilon y}$	
	<i>Der.</i>	
	$\vdash$	
(1)	$\varphi(x\epsilon y/z \bullet z)$	[z]
(2)	$x\epsilon y/z \cap z$	[1×RT]
(3)	$x \cap z \subset y$	[2, D $\cap$, D/]
(4)	$x\epsilon z$	[2, D $\cap$]
(5)	$x\epsilon x$	[4×R1]
(6)	$x\epsilon x \cap z$	[4, 5, D $\cap$]
(7)	$x\epsilon x \cap z \rightarrow x\epsilon y$	[3×O $\subset$]
(8)	$x\epsilon y$	[6, 7×MP]
(9)	$\varphi(x\epsilon y)$	[8×RT]

$\varphi I/$	$\varphi \frac{x\epsilon x \wedge x \bullet z \subset y}{x\epsilon y/z}$	[RT, D/]
--------------	--	----------

$\varphi O\backslash$	$\varphi \frac{x\epsilon y \bullet y \backslash z}{x\epsilon z}$	
	<i>Der.</i>	
	$\vdash$	
(1)	$\varphi(x\epsilon y \bullet y \backslash z)$	[z]
(2)	$x\epsilon y \cap y \backslash z$	[1×RT]
(3)	$x\epsilon y$	[2, D $\cap$]
(4)	$x\epsilon y \backslash z$	[2, D $\cap$]
(5)	$x \cap y \subset z$	[4, D $\backslash$]
(6)	$x\epsilon x$	[3×R1]
(7)	$x\epsilon x \cap y$	[3, 6, D $\cap$]
(8)	$x\epsilon x \cap y \rightarrow x\epsilon z$	[5×O $\subset$]
(9)	$x\epsilon z$	[7, 8×MP]
(10)	$\varphi(x\epsilon z)$	[9×RT]

$$x\epsilon x \wedge y \bullet x \subset z$$

$\varphi\text{I\backslash}$ $\varphi \xrightarrow{\quad\quad\quad} x\epsilon y\backslash z$ [RT, O $\subset$, D $\cap$, I $\subset$, D $\backslash$]

φRC $\varphi \xrightarrow{x\epsilon X\bullet Y\bullet Z\wedge Y\subset y} x\epsilon X\bullet y\bullet Z$

Der.

- | | | |
|-----|---|---------------------------|
| | $\vdash$ | |
| (1) | $\varphi(x\epsilon X\bullet Y\bullet Z\wedge Y\subset y)$ | [Z] |
| (2) | $x\epsilon X\cap Y\cap Z\wedge Y\subset y$ | [1 $\times$ RT] |
| (3) | $x\epsilon X$ | [2, D $\cap$] |
| (4) | $x\epsilon Y$ | [2, D $\cap$] |
| (5) | $x\epsilon Y \rightarrow x\epsilon y$ | [2 $\times$ O $\subset$] |
| (6) | $x\epsilon y$ | [4, 5 $\times$ MP] |
| (7) | $x\epsilon Z$ | [2, D $\cap$] |
| (8) | $x\epsilon X\cap y\cap Z$ | [3, 6, 7, D $\cap$] |
| (9) | $\varphi(x\epsilon X\bullet y\bullet Z)$ | [8 $\times$ RT] |

Literatura

1. Ajdukiewicz K. (1935), *Die syntaktische Konnexität*, w: „*Studia Philosophica*“ 1, s. 1–27. (Wersja polska: *O spójności syntaktycznej*, w: tenże, *Język i poznanie*, t. I, PWN, Warszawa 1960.)
2. Bar-Hillel Y. (1953), *A quasi-arithmetical notation for syntactic description*, w: „*Language*” 29, s. 47–58.
3. Borkowski L. (1980), *Bezkwantyfikаторowy założeniowy system rachunku nazw. Część I*, w: „*Roczniki Filozoficzne*” 28, z. 1, s. 133–148. (Przedruk w: tenże, *Studia logiczne. Wybór*, TNKUL, Lublin 1990.)
4. Borkowski L. (1993), *Bezkwantyfikаторowy założeniowy system rachunku nazw. Część II*, w: „*Roczniki Filozoficzne*” 41, z. 1, s. 11–21.
5. Buszkowski W. (1989), *Logiczne podstawy gramatyk kategorialnych Ajdukiewicza-Lambeka*, PWN, Warszawa.
6. Kandulski M. (1995) *Gramatyki kategorialne z regułami strukturalnymi*, w: Pogonowski J. (red.), *Eufonia i logos*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, s. 389–399.
7. Kołowska-Gawiejnowicz M. (2000), *Zastosowania etykietowanych systemów dedukcyjnych w dowodach pełności rachunku Lambeka*, w: Perzanowski J. i Pietruszczak A. (red.) *Logika & Filozofia logiczna*, Wydawnictwo UMK, Toruń, s. 169–182.
8. Lambek J. (1958), *The Mathematics of Sentence Structure*, w: *American Math. Monthly*, 68, s. 154–170. (Przedruk w: Buszkowski W., Marciszewski W., van Benthem J. (red.), *Categorial Grammar*, John Benjamins Publ. Co., Amsterdam 1988.
9. Lambek J. (1961), *On the calculus of syntactic types*, w: Jakobson R. (red.), *Structure of Language and Its Mathematical Aspects*, „Amer. Math. Soc.”, Providence, I, s. 166–178.
10. Lehrberger J. (1974), *Functor Analysis of Natural Language*, Mouton, The Hague – Paris.