

Agnieszka Wiechula

Rozważania dotyczące trójwartościowej logiki Łukasiewicza

W niniejszym artykule przedstawię motywacje filozoficzne, które towarzyszyły Janowi Łukasiewiczowi podczas tworzenia logiki trójwartościowej. Dokonam analizy trójwartościowego rachunku zdań L_3 oraz przedstawię rozwiązanie problemu paradoksów semantycznych i teoriomnogościowych. Ponadto wskażę wybrane własności strukturalne spójników logicznych w L_3 oraz możliwe interpretacje filozoficzne trzeciej wartości logicznej w systemie Łukasiewicza.

Pierwsze informacje dotyczące powstania logiki trójwartościowej Jana Łukasiewicza pochodzą z 7 marca 1918 roku¹. W czasie pożegnalnego wykładu na Uniwersytecie Warszawskim Łukasiewicz ogłosił, że zbudował system logiki trójwartościowej. Natomiast w 1920 roku w „Ruchu Filozoficznym” ukazał się jego referat z 207. posiedzenia naukowego Polskiego Towarzystwa Filozoficznego we Lwowie, w którym, po raz pierwszy w historii logiki, został przedstawiony w sposób sformalizowany trójwartościowy system rachunku zdań². W kolejnych latach Łukasiewicz stworzył całą klasę logik wielowartościowych, zdefiniowanych za pomocą matryc logicznych, a wyniki swoich badań nad systemami wielowartościowymi zaprezentował w 1930 roku we wspólnej pracy z Alfredem Tarskim³.

¹ J. Łukasiewicz, *Z zagadnień logiki i filozofii*, PWN, Warszawa 1961.

² Tenże, *O logice trójwartościowej*, „Ruch Filozoficzny” 5 (1920), s. 170–171.

³ J. Łukasiewicz, A. Tarski, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, „Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie”, 23 (1930), t. III, s. 1–21.

1. Motywacje filozoficzne

Znaczący wpływ na powstanie pierwszego trójwartościowego rachunku zdań autorstwa Jana Łukasiewicza miały dyskusje prowadzone w szkole lwowsko-warszawskiej⁴. Dotyczyły one m.in. ogólnej teorii przedmiotów Brentana-Twardowskiego-Meinonga, problemu determinizmu i indeterminizmu oraz takich wartości jak wolność i twórczość. Łukasiewicz był zwolennikiem teorii przedmiotów sprzecznych Meinonga, zgodnie z którą istnieją przedmioty posiadające sprzeczne cechy⁵. Meinong oparł swą koncepcję ontologiczną na zasadach: wolności (dopuszczalny jest każdy rodzaj przedmiotów), niezależności (przedmiotom mogą przysługiwać cechy niezależne od ich statusu ontycznego), intencjonalności (każde przedstawienie ma swój przedmiot) oraz transcendencji (przedmioty bytują niezależnie od przedstawień). Przedmiotem jest wszystko to, co daje się przedstawić i ująć w jakimś przeżyciu. Natomiast przedmiotami sprzecznymi są przedmioty: logicznie niemożliwe (np. kwadratowe koło), empirycznie niemożliwe (np. złota góra) oraz fikcyjne (np. centaur)⁶. Gdyby tego typu obiekty w ogóle nie istniały, to nie można by wypowiedzieć na ich temat żadnego sądu prawdziwego, a zatem również takiego, który orzekałby, że nie są przedmiotami. Zdaniem polskiego filozofa i logika nie istnieją przedmioty niesprzeczne. Według niego, pojmowanie przedmiotu jako czegoś, co nie może zawierać sprzecznych cech, jest błędne, gdyż przeczy temu codzienna praktyka. Otóż często utożsamiamy z przedmiotem coś, co zawiera sprzeczność (np. paradoksy semantyczne i teoriomnogościowe) lub coś, co tylko pozornie sprzeczności nie zawiera (np. akty prawne). Nie ma także gwarancji, że w realnym świecie wszystkie stany rzeczy pozbawione są sprzecznych cech. Zatem, aby uniknąć błędów, należy przyjąć założenie, że każdy przedmiot potencjalnie zawiera sprzeczne cechy, niezależnie od tego, czy potrafimy je wskazać. System nowej logiki projektowany przez Łukasiewicza miał za zadanie umożliwiać formalizację rozumowań dotyczących przedmiotów sprzecznych⁷.

Kolejna motywacja wypływała z etycznych rozważań nad problemem wolności. Łukasiewicz stał na stanowisku, zgodnie z którym u podstaw każdego systemu logiki leży pewna ontologia jako ujęcie możliwych struktur bytowych.

⁴ J. Woleński, *Filozoficzna Szkoła Lwowsko-Warszawska*, PWN, Warszawa 1985, oraz: tenże, *Szkoła Lwowsko-Warszawska w polemikach*, Scholar, Warszawa 1997.

⁵ W 1909 roku już jako doktor habilitowany Łukasiewicz wyjechał do Grazu i uczestniczył w seminarium prowadzonym przez Meinonga. Ogólna teoria przedmiotów Meinonga uważana była za ontologię fundamentalną.

⁶ R. Poczuć, *Spór o zasadę niesprzeczności. Studium z zakresu filozoficznych podstaw logiki*, Tow. Nauk. KUL, Lublin 2000.

⁷ G. Malinowski, *Logiki wielowartościowe*, PWN, Warszawa 2006, s. 10.

W ontologii związanej z logiką klasyczną obowiązuje determinizm, a jego bezpośrednim wyrazem jest zasada dwuwartościowości. Natomiast takie wartości jak twórczość, wolność i odpowiedzialność wymagają szczególnej ontologii – wolnej od determinizmu⁸. Łukasiewicz podzielał w tej kwestii pogląd Tadeusza Kotarbińskiego – prawda jest wieczna, ale nie odwieczna⁹. Jeśli dziś coś jest prawdą, np. prawdą jest, że stworzyłem dzieło sztuki, to już zawsze w przyszłości będzie prawdą, że wtedy i wtedy stworzyłem dzieło sztuki. Ale zanim to się stało prawdą, nie było ani prawdą, ani fałszem. Determinista natomiast uznaje odwieczność prawdy, a zatem dla niego cała przyszłość jest z góry ustalona. To, co jest prawdą dziś, było prawdą w dowolnej wcześniejszej chwili, a to, co będzie prawdą w przyszłości, jest prawdą już dziś. Milczącym założeniem, leżącym u podstaw tego poglądu, jest zasada dwuwartościowości. Każde zdanie jest albo prawdziwe, albo fałszywe. Zatem to, co jest prawdą dziś, nie mogło być ani wcześniej, ani później fałszem, gdyż fałsz nie zmienia się w prawdę – również jest wieczny i odwieczny. Łukasiewicz był indeterministą w tym sensie, że chociaż uznawał zasadę przyczynowości, to jednak dopuszczał możliwość zaistnienia w przyszłości zdarzeń niezdeterminowanych, których przyczyny nie są jeszcze określone. Dlatego też odrzucał uniwersalną ważność zasady dwuwartościowości i przyjmował istnienie zdań, których wartość nie jest z góry przesądzona. Zdania dotyczące przyszłych zdarzeń kontyngentnych nie są ani prawdziwe, ani fałszywe, tylko obojętne. W chwili obecnej nie mają żadnego realnego odpowiednika, więc nie mogą być prawdziwe, ale ich zaprzeczenia także nie mają realnego odpowiednika – nie mogą być fałszywe. Można powiedzieć, że nie odpowiada im ani byt, ani niebyt, lecz obiektywna możliwość. Takim zdaniom przyporządkowujemy trzecią wartość logiczną. Dzięki odrzuceniu zasady

⁸ J. Łukasiewicz, *O determinizmie*, (1906) [w:] tenże, *Z zagadnień logiki i...*, s. 114–126 oraz tenże, *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa. Studium krytyczne*, Kraków 1910.

⁹ W 1913 roku T. Kotarbiński i S. Leśniewski pisali o zasadzie wyłączonego środka. Obaj krytykowali tę zasadę, ale Leśniewski bronił zasady dwuwartościowości. Dla niego prawda była nie tylko wieczna, ale również odwieczna. Kotarbiński początkowo uznawał uniwersalną ważność zasady wyłączonego środka w kontekście trzech typów sądów: prawdziwych, fałszywych i obojętnych. Rozumiał on ją w następujący sposób: skoro sądem sprzecznym wobec sądu prawdziwego jest sąd fałszywy i odwrotnie, a sądem sprzecznym wobec sądu obojętnego jest również sąd obojętny, którego treść jest sprzeczna z treścią pierwszego, to ważna jest zasada mówiąca o tym, że dwa sądy spreczne nie mogą być zarazem fałszywe. Leśniewski natomiast wskazał takie pary zdań, które mogą być fałszywe; są to zdania spreczne, w których podmiotem jest nazwa pusta – taka nazwa nie posiada desygnatu (kwadratowe koło, centaur itd.). Pod wpływem tej argumentacji Kotarbiński zmienił poglądy na zasadę wyłączonego środka oraz wartość logiczną zdań sprzecznych; T. Kotarbiński, *Zagadnienie istnienia przyszłości*, „Przegląd Filozoficzny” 16 (1913); S. Leśniewski, *Czy prawda jest tylko wieczna czy też wieczna i odwieczna?*, „Nowe Tory” 18 (1913).

dwuwartościowości i wzbogaceniu możliwych struktur bytowych – ontologia nowej logiki wolna jest od determinizmu i dzięki temu da się pogodzić z wolną twórczością człowieka.

Wróćmy jednak do zasady dwuwartościowości. W logice klasycznej jej wyrazem są zasady sprzeczności i wyłączonego środka. Pierwsza z nich mówi o tym, że dwa zdania sprzeczne nie mogą być równocześnie prawdziwe, a druga – dwa zdania sprzeczne nie mogą być równocześnie fałszywe. Analizując obie zasady uważane za fundamentalne prawa logiki – szczególnie pierwsza z nich – autor doszedł do wniosku, że nie są one tak oczywiste, jak dotąd mniemano. Posiadają jedynie wartość praktyczną, mianowicie służą do rozróżniania prawdy od fałszu, nie mogą natomiast być traktowane jako aksjomaty. Zasada dwuwartościowości nie jest zasadą logiczną, ale metalogiczną, i leży u podstaw logiki klasycznej – dwuwartościowej. Pierwszym krokiem do budowy logiki nieklasycznej jest zatem rewizja podstaw – zasady dwuwartościowości¹⁰.

Zanim powstała logika trójwartościowa Łukasiewicz badał związki logiczne zachodzące między zdaniami modalnymi¹¹. Rozróżniał trzy poglądy na temat tych zdań: stanowisko logiki tradycyjnej, determinizmu ontologicznego oraz indeterminizmu ontologicznego. Stwierdził niezgodność tradycyjnych twierdzeń o tych zdaniach. Natomiast na gruncie trójwartościowego rachunku zdań wszystkie przekazane przez tradycję twierdzenia o zdaniach modalnych są niesprzeczne. Problem polegał na tym, że zgodnie z zasadą dwuwartościowości w logice klasycznej można przyporządkować danemu zdaniu jedynie prawdziwość lub fałszywość. Natomiast biorąc pod uwagę zdania modalne z perspektywy trzech stanowisk, okazało się, że w niektórych przypadkach nie można określić zdania jako prawdziwego lub fałszywego bez popadnięcia w sprzeczność. Dopiero gdy wprowadzimy trzecią wartość logiczną, wszystkie twierdzenia o rozważanych zdaniach posiadają wartość logiczną – otrzymujemy niesprzeczną całość.

Droga, która doprowadziła Jana Łukasiewicza najpierw do logiki trójwartościowej, a następnie do rodziny logik wielowartościowych, rozpoczęła się od analizy takich zasad, jak: zasada sprzeczności, wyłączonego środka, przyczynowości i dwuwartościowości. Dzięki dociekaniom natury filozoficznej na gruncie ontologii i etyki, a także formalnym badaniom w zakresie logiki Arystotelesa i stoików, krystalizowała się wizja nowej logiki. Początkowo miała być to logika „niearystotelesowa”, ale pod wpływem analizy tekstów starożytnych ostatecznie nadano jej miano „niechryzypowej”. Miało to związek ze starożytnym sporem

¹⁰ J. Łukasiewicz, *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls*, „Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie”, 23 (1930), t. III, s. 51–77.

¹¹ Tenże, *O logice trójwartościowej...*, oraz tenże, *Philosophische Bemerkungen...*

o ważność zasady dwuwartościowości: to stoicy byli zwolennikami tej zasady, natomiast Arystoteles kwestionował jej użycie, gdy rozważał zdania o przyszłych zdarzeniach niezdeterminowanych¹². Logika „niechryzypowa” powstała w wyniku odrzucenia zasady dwuwartościowości i przyjęcia trzeciej wartości logicznej, obok prawdy (1) i fałszu (0), „ $\frac{1}{2}$ ” jest dodatkową, pośrednią wartością logiczną, określoną początkowo jako „możliwość”, a następnie jako „niezdeterminowanie”.

2. System L_3

W 1920 roku Łukasiewicz po raz pierwszy przedstawił w sposób sformalizowany trójwartościowy system rachunku zdań, scharakteryzowany za pomocą pojęć zaczerpniętych z algebry logiki Couturata¹³, których pierwotnymi twórcami byli J. Boole i F. Schröder. Podstawowym stosunkiem między zdaniami jest stosunek wynikania, który oznaczamy symbolem $<$ (mniejszy od). Stosunek $a < b$, gdzie a i b oznaczają zdania, interpretujemy w następujący sposób: zdanie a pociąga za sobą zdanie b , czyli „jeśli a jest prawdziwe, to b jest prawdziwe” lub „z a wynika b ”. Drugim ważnym pojęciem, wykorzystywanym przez Łukasiewicza, jest tożsamość (równość) zdań, wyrażona za pomocą symbolu $=$, i zdefiniowana w następujący sposób: $a = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a < b$ i $b < a$. Zatem zdania a i b są tożsame, $a = b$, gdy z a wynika b i z b wynika a , czyli zdania a i b są równocześnie prawdziwe lub równocześnie fałszywe¹⁴. Ponadto 0 (fałsz) oznacza zdanie, z którego wynika dowolne zdanie: dla dowolnego zdania x jest tak, że $0 < x$, 1 (prawda) oznacza zdanie, które wynika z dowolnego zdania: dla dowolnego zdania x jest tak, że $x < 1$ ¹⁵. Łukasiewicz wprowadził dodatkową wartość „możliwe”, której odpowiada symbol 2 (zdanie nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe).

Następujące zasady dotyczące tożsamości i wynikania określają logikę trójwartościową:

- 1) Zasady tożsamości fałszu, prawdy i trzeciej wartości:

$$(0 = 0) = 1, (1 = 1) = 1, (2 = 2) = 1, (0 = 1) = (1 = 0) = 0,$$

¹² Arystoteles, *Hermeneutyka*, ks. IX, [w:] tenże, *Kategorie, Hermeneutyka, Analityki pierwsze, Analityki wtórne, Topiki, O dowodach sofistycznych. Dzieła wszystkie*, t. 1, PWN, Warszawa 1990, s. 75–77.

¹³ L. Couturat, *L'Algèbre de la logique*, „Scientia, Série Physico-Mathématique”, 24, Paris 1905.

¹⁴ Tamże, s. 2–6.

¹⁵ Tamże, s. 16–19.

$$(0 = 2) = (2 = 0) = (1 = 2) = (2 = 1) = 2,$$

2) Zasady wynikania:

$$(0 < 0) = (0 < 1) = (1 < 1) = (0 < 2) = (2 < 1) = (2 < 2) = 1,$$

$$(1 < 0) = 0, (2 < 0) = (1 < 2) = 2.$$

Wskazują one wartość poszczególnych wyrażeń umieszczonych w nawiasach, zbudowanych za pomocą stałych logicznych ze zbioru $\{0,1,2\}$ oraz symboli funkcyjnych $\{=, <\}$. Ponadto wyróżniają grupy wyrażeń posiadających tę samą wartość logiczną. Przykładowo wyrażenie postaci $(0 = 0) = 1$ oznacza, że po pierwsze fałsz jest tożsamy z fałszem, a po drugie, że ta tożsamość jest równa prawdzie; wyrażenie postaci $(0 = 1) = (1 = 0) = 0$ oznacza, że tożsamości fałszu i prawdy oraz prawdy i fałszu są równe sobie i fałszowi, czyli prawda nie jest równoważna fałszowi; natomiast jakakolwiek tożsamość prawdy lub fałszu z wartością 2 jest równa 2, co oznacza, że „możliwa” jest tożsamość zdania „możliwego” i prawdy lub fałszu.

Pozostałe operacje – zaprzeczanie $'$, dodawanie $+$ i mnożenie $\cdot$ – zostały zdefiniowane za pomocą powyższych zasad:

$$a' = (a < 0),$$

$$a + b = [(a < b) < b],$$

$ab = (a' + b')'$, gdzie a i b oznaczają zmienne zdaniowe, które mogą przybierać wartości ze zbioru $\{0,1,2\}$.

Jeśli zasady tożsamości i wynikania przedstawimy w postaci tabelk prawdziwościowych, to będą one miały następującą postać:

$a = b$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	1	2
2	2	2	1

$a < b$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	2
2	2	1	1

Zauważmy, że w definicji zaprzeczania Łukasiewicz wykorzystał operację wynikania oraz stałą logiczną 0 – fałsz.

Jeśli ponadto zwrócimy uwagę na zbiór wartości logicznych $\{0,1,2\}$, to okaże się, że liczba 2 oznacza trzecią wartość, ale nie wskazuje na pośredni charakter tej wartości, między prawdą a fałszem. Gdyby natomiast liczbę 2 umieścić między klasycznymi wartościami, to utracimy rosnący porządek wśród tych wartości. Symbol oznaczający trzecią wartość logiczną nie odzwierciedla rów-

niez intuicji autora mówiącej o tym, że zdanie o przyszłości nieokreślonej jest obecnie możliwe, ale w przyszłości przyjmie jedną z dwóch wartości klasycznych – będzie prawdziwe lub fałszywe. Dopiero, gdy liczbę 2 zastąpimy ułamkową wartością $\frac{1}{2}$, otrzymamy zbiór trzech wartości $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ spełniający zarówno formalne, jak i intuicyjne wymogi.

W 1930 roku we wspólnej pracy Łukasiewicza i Tarskiego trójwartościowy system rachunku zdań L_3 został przedstawiony za pomocą metody matrycowej. W systemie L_3 zdania mogą przyjmować trzy różne wartości prawdziwościowe: 1, $\frac{1}{2}$, 0, gdzie 1 oznacza, że zdanie jest prawdziwe, $\frac{1}{2}$ oznacza, że zdanie nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe, natomiast 0 oznacza, że zdanie jest fałszywe. 1 (prawda), podobnie jak w logice klasycznej, jest wartością wyróżnioną, natomiast pozostałe dwie wartości charakteryzują się malejącą zawartością prawdy. Trzecią, ułamkową wartość logiczną utożsamiamy z „możliwością” lub „niezdecydowaniem”, odpowiada ona zdaniom mówiącym o niezdecydowanej przyszłości.

System L_3 został zbudowany w oparciu o dwa terminy pierwotne – spójniki implikacji i negacji, oznaczone odpowiednio przez $\rightarrow$ i $\neg$ ¹⁶; p i q oznaczają zmienne zdaniowe. Oto ich tabelki:

$p \rightarrow q$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

p	$\neg p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

Kolejne klasyczne spójniki – alternatywa $\vee$, koniunkcja $\wedge$ i równoważność $\equiv$ – zostały zdefiniowane za ich pomocą:

$$p \vee q \stackrel{df}{=} (p \rightarrow q) \rightarrow q,$$

$$p \wedge q \stackrel{df}{=} \neg(\neg p \vee \neg q),$$

$$p \equiv q \stackrel{df}{=} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

¹⁶ W oryginale Łukasiewicz użył następujących symboli do oznaczenia podstawowych spójników logicznych: C – implikacja, N – negacja, A – alternatywa, K – koniunkcja oraz E – równoważność. Za pomocą zmiennych zdaniowych $p, q, \dots$ oraz stałych logicznych C, N, ..., E tworzył wyrażenia złożone bez potrzeby użycia nawiasów: Cpq, Np, CCpqCCqrCpr, itd.

Następujące tabelki prawdziwościowe dla wymienionych wyżej spójników logicznych charakteryzują system $\mathbf{L}_3$:

$p \vee q$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$p \wedge q$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$p \equiv q$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

Zwróćmy uwagę na definicje alternatywy, koniunkcji i równoważności – są one poprawne również na gruncie logiki klasycznej, gdzie dysponujemy dwiema wartościami prawdziwościami 1 i 0; tabelki dla wyrażeń po lewej stronie równości definicyjnych pokrywają się z tabelkami wartościowania dla wyrażeń po prawej stronie. Jednak w logice klasycznej wskazuje się zwykle, w przypadku alternatywy, na inne wyrażenie:

$$p \vee q \stackrel{df}{=} \neg(\neg p \wedge \neg q),$$

co dalej daje nam równość:

$$p \vee q \stackrel{df}{=} \neg p \rightarrow q.$$

Tabelka wartościowania dla wyrażenia $p \vee q$ pokrywa się z tabelką dla wyrażenia $\neg p \rightarrow q$ na gruncie klasycznego rachunku zdań **KRZ**. Jeśli jednak porównamy te wyrażenia na gruncie $\mathbf{L}_3$, to okaże się, że podstawiając za p i q w obu z nich wartość $\frac{1}{2}$, alternatywa będzie miała wartość $\frac{1}{2}$, natomiast implikacja będzie prawdziwa, zgodnie z przedstawionymi powyżej tabelkami. Na gruncie trójwartościowego rachunku zdań właściwa jest więc definicja podana przez Łukasiewicza, gdyż dla p i q równych $\frac{1}{2}$, wyrażenie $(p \rightarrow q) \rightarrow q$ posiada wartość taką samą jak alternatywa $p \vee q$, czyli $\frac{1}{2}$.

Wróćmy jednak do tabelki prawdziwościowych charakteryzujących spójniki logiczne. Ważną własnością omawianych tabelki jest to, że w przypadku, gdy rozpatrujemy wyłącznie pary klasycznych wartości, to tabelki systemu $\mathbf{L}_3$ i **KRZ** pokrywają się. Przykładowo $1 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow 0 = 1$ oraz $1 \rightarrow 0 = 0$ itd. Ciekawą własnością spójnika negacji jest to, że jeśli dane zdanie posiada

wartość $\frac{1}{2}$, to również jego negacja posiada tę samą wartość. Wynika to z następującej zależności: jeśli dane zdanie jest możliwe, to również jego negacja jest tak samo możliwa, pamiętając oczywiście o tym, że zdania możliwe mówią o przyszłych zdarzeniach kontyngentnych.

Poza klasycznymi spójnikami, Łukasiewicz scharakteryzował również modalne operatory możliwości i konieczności¹⁷, którym odpowiadają symbole $\Diamond$ i $\Box$, za pomocą następujących tabel:

p	$\Diamond p$
1	1
$\frac{1}{2}$	1
0	0

p	$\Box p$
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	0

Wyrażenie „możliwe, że p ” jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie p jest prawdziwe lub możliwe, w pozostałym przypadku wyrażenie jest fałszywe. Natomiast wyrażenie „konieczne, że p ” jest prawdziwe tylko i wyłącznie w sytuacji, gdy zdanie p jest prawdziwe. Ponadto autor próbował skonstruować na potrzeby swojego systemu taką definicję pojęcia możliwości, aby na jej podstawie uzasadnić wszystkie, podane przez tradycję, intuicyjne twierdzenia o zdaniach modalnych. W 1921 roku Alfred Tarski¹⁸ podał definicję, która spełniała powyższy warunek, miała ona postać:

$$\stackrel{df}{\Diamond p} = \neg p \rightarrow p. \quad (1)$$

Jeśli porównamy tabelki prawdziwościowe dla obu wyrażeń, okaże się, że idealnie się pokrywają, przykładowo dla $p = \frac{1}{2}$, $\Diamond p = 1$ oraz wyrażenie $\neg p \rightarrow p$ również posiada wartość 1.

Definicję 1 można zastosować również do pojęcia konieczności, „konieczne, że p ” to tyle, co „nie jest możliwe, że nie- p ”:

$$\stackrel{df}{\Box p} = \neg \Diamond \neg p = \neg(p \rightarrow \neg p).$$

Mówimy, że zdanie p jest konieczne, jeśli nie pociąga za sobą własnej negacji.

Wnioskiem płynącym z wprowadzenia do systemu $\mathbf{L}_3$ definicji pojęcia możliwości, autorstwa Tarskiego, była niesprzeczność, w trójwartościowym rachunku zdań, wszystkich twierdzeń o zdaniach modalnych, przekazanych przez tradycję.

¹⁷ J. Łukasiewicz, *Philosophische Bemerkungen...*

¹⁸ Tamże.

Trójwartościowy system rachunku zdań L_3 jest podzbiorem właściwym **KRZ**, co oznacza, że wszystkie tautologie trójwartościowe są zarazem tautologiami logiki dwuwartościowej. Przykładowo, formuły $p \rightarrow (q \rightarrow p)$, $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ są tautologiami zarówno w L_3 , jak i w **KRZ**. Natomiast nie każda tautologia **KRZ** jest tautologią w L_3 . Przykładami wyrażeń, które utraciły swą moc w systemie trójwartościowym, są m.in. następujące formuły: $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$, $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$, $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p]$, $(p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow \neg p$ oraz prawo sprzeczności $\neg(p \wedge \neg p)$ i prawo wyłączonego środka $p \vee \neg p$. Dwa ostatnie prawa przyjmują wartość $\frac{1}{2}$ w przypadku, gdy p ma taką wartość. Odrzucenie prawa sprzeczności oraz prawa wyłączonego środka było wyrazem indeterministycznego poglądu Łukasiewicza na świat oraz pierwotnego zaprzeczenia uniwersalnej ważności zasady dwuwartościowości.

Istotną własnością systemu L_3 , rozpatrywanego w kontekście problemu pojawiania się paradoksów na gruncie logiki klasycznej i teorii mnogości, jest następujący fakt: wszystkie kontrtautologie **KRZ**, będące podstawieniem formuły postaci $p \equiv \neg p$, są niesprzeczne w L_3 , gdyż dla zdania p posiadającego wartość $\frac{1}{2}$ równoważność jest prawdziwa. Wiąże się to z wczesną motywacją filozoficzną Łukasiewicza, odnoszącą się do ontologii fundamentalnej Meinonga – system trójwartościowy miał formalizować wnioski dotyczące przedmiotów sprzecznych (tj. przedmiotów posiadających sprzeczne cechy). Jeśli ponadto przyjąć, że formułom prowadzącym do paradoksów przyporządkowujemy wartość $\frac{1}{2}$, to na tej podstawie można przyjąć, że w logice trójwartościowej nie pojawiają się antynomie, takie jak antynomia Russella klas niezwrrotnych, czy antynomia Grelinga dotycząca własności „heterologiczności”¹⁹.

W 1931 roku M. Wajsberg dokonał aksjomatyzacji negacyjno-implikacyjnego fragmentu systemu L_3 Łukasiewicza oraz udowodnił pełność i niezależność tej aksjomatyzacji²⁰. Regułami wnioskowania są tu reguły odrywania i podstawiania. Następujące cztery formuły stanowią aksjomatykę L_3 :

¹⁹ Inne podejście prowadzące do rozwiązania problemu paradoksów semantycznych i teorii mnogościowych przedstawili w swoich pracach: D.A. Boczwar, Moh Shaw-Kwei oraz R.L. Martin i P.W. Woodruff (D.A. Boczwar, *Ob odnom trékhznačnom isčislénii i égo priménénii k analizu paradoksov klassičeskogo rasširennogo funkcjonal'nogo isčislénia*, „Matématičeskij Sbornik” 4 (1938), s. 287–308; Moh Shaw-Kwei, *Logical paradoxes for many-valued logics*, „The Journal of Symbolic Logic” 19 (1954), s. 37–40; R.L. Martin, P.W. Woodruff, *On Representing „True-in-L”*, „Philosophia” 5 (1975), s. 213–217.

²⁰ M. Wajsberg, *Aksjomatyzacja trójwartościowego rachunku zdań*, „Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie” 23 (1931), t. III, s. 126–145.

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$,
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$,
3. $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$,
4. $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow p) \rightarrow p$.

Wszystkie powyższe aksjomaty są tautologiami **KRZ**, ale zamiast aksjomatu 4. przyjmuje się zwykle w logice klasycznej wyrażenie postaci $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$, które nie jest tautologią trójwartościową, gdyż dla $p = \frac{1}{2}$ wartość całego wyrażenia to $\frac{1}{2}$. Dlatego też, biorąc pod uwagę prawdziwość formuł 1–4 na gruncie **KRZ**, można interpretować aksjomatykę Wajsberga jako dwuwartościową. Jest to kolejne potwierdzenie tezy, że logika trójwartościowa Łukasiewicza stanowi fragment logiki klasycznej i jest jej uogólnieniem.

W 1936 roku J. Słupecki ustalił, że trójwartościowy system Łukasiewicza nie jest funkcyjnie pełny²¹, co oznacza, że za pomocą podstawowych spójników $\rightarrow$ i $\neg$, scharakteryzowanych poprzez tabelki prawdziwościowe, nie można zdefiniować wszystkich możliwych w tym systemie funkcji prawdziwościowych. Otóż, za pomocą funktora implikacji i negacji nie można zdefiniować żadnej funkcji jednoargumentowej. Przykładowo nie można w L_3 zdefiniować za pomocą podstawowych spójników prawdziwościowych jednoargumentowej funkcji **T**, która dowolnemu zdaniu przyporządkowuje wartość $\frac{1}{2}$. Tabela prawdziwościowa dla operatora **T** przedstawia się następująco:

p	$\mathbf{T}p$
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$

Słupecki zauważył, że jeśli wzbogacimy trójwartościowy system Łukasiewicza o operator **T**, nazwany później „operatorem Słupeckiego”, to otrzymamy system funkcyjnie pełny. Ponadto system L_3 z operatorem **T** jest aksjomatyzowalny za pomocą znanych czterech formuł Wajsberga, wzbogaconych o dwie następujące:

1. $\mathbf{T}p \rightarrow \neg \mathbf{T}p$,

²¹ J. Słupecki, *Der volle dreiwertige Aussagenkalkül*, „Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie” 29 (1936), t. III, s. 9–11.

2. $\neg Tp \rightarrow Tp$.

Wyrażają one intuicję mówiącą o tym, że zdanie możliwe i jego negacja są równoważne.

Łukasiewicz zbudował swój system za pomocą metody matrycowej, określonej poprzez pojęcia zdefiniowane przez Tarskiego²².

Matrycą logiczną nazywamy uporządkowaną czwórkę $\mathbf{M} = [A, B, f, g]$, złożoną z dwóch rozłącznych zbiorów A i B , z funkcji dwuargumentowej i z funkcji jednoargumentowej, przy czym obie funkcje są określone dla wszystkich elementów $A \cup B$ i przybierają jako wartości tylko elementy tego zbioru. Matrycę $\mathbf{M}$ nazywamy normalną, gdy spełniony jest następujący warunek:

(*) jeśli $x \in B$ i $y \in A$, to $f(x, y) \in A$.

Wartościowaniem nazywamy funkcję $v: For \rightarrow A \cup B$, która jest określona na zbiorze formuł i przyjmuje wartości w zbiorze $A \cup B$.

W przypadku trójwartościowego systemu $\mathbf{L}_3$ matryca ma postać $\mathbf{M}_{\mathbf{L}_3} = [\{0, \frac{1}{2}\}, \{1\}, \rightarrow, \neg]$, gdzie zbiór $A = \{0, \frac{1}{2}\}$ jest zbiorem wartości niewyróżnionych, $B = \{1\}$ jest zbiorem wartości wyróżnionych, 1 jest jedyną wartością wyróżnioną, implikacja $\rightarrow$ jest funkcją dwuargumentową, a negacja $\neg$ – jednoargumentową.

Matryca $\mathbf{M}_{\mathbf{L}_3}$ jest matrycą normalną, gdyż spełnia warunek (*):

$p \rightarrow q$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

co oznacza, że zdanie złożone o budowie implikacyjnej, w którym poprzednikiem jest zdanie posiadające wartość wyróżnioną, a następnikiem zdanie o wartości niewyróżnionej, zawsze posiada wartość niewyróżnioną.

Mówimy, że zdanie p spełnia matrycę $\mathbf{M}_{\mathbf{L}_3}$, gdy dla każdego wartościowania v tej matrycy $v(p) \in B$.

²² J. Łukasiewicz, A. Tarski, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül...*

Innymi słowy: zdanie p spełnia matrycę $\mathbf{M}_{L_3}$, gdy dla każdego wartościowania przyjmuje wartość wyróżnioną w matrycy $\mathbf{M}_{L_3}$ – jest tautologią $\mathbf{M}_{L_3}$.

Trójwartościowym systemem rachunku zdań L_3 jest więc zbiór wszystkich zdań, spełniających matrycę $\mathbf{M}_{L_3}$.

3. Własności strukturalne

Trójwartościowe tabelki prawdziwościowe dla podstawowych spójników zdaniowych w systemie L_3 można scharakteryzować za pomocą następujących własności strukturalnych²³: normalność, jednorodność, regularność w sensie Kleenego²⁴ oraz ciągłość. Przyjrzyjmy się bliżej temu zagadnieniu.

Mówimy, że trójwartościowa tabelka prawdziwościowa dla danego spójnika zdaniowego jedno lub dwuargumentowego jest normalna, jeśli: 1) zawiera przy najmniej jedną wyróżnioną wartość prawdziwościową, analogiczną z prawdą oraz przynajmniej jedną niewyróżnioną wartość prawdziwościową, analogiczną z fałszem, 2) zgadza się w całości z odpowiednią tabelką dwuwartościową, gdy bierzemy pod uwagę tylko prawdę i fałsz. Ponadto logika trójwartościowa jest logiką normalną, gdy tabelki prawdziwościowe dla wszystkich podstawowych spójników zdaniowych są normalne.

W systemie Łukasiewicza wszystkie tabelki dla podstawowych spójników zdaniowych: negacja $\neg$, koniunkcja $\wedge$, alternatywa $\vee$, implikacja $\rightarrow$ oraz równoważność $\equiv$, posiadają własność normalności, dlatego też cała logika trójwartościowa jest normalna w tym sensie.

Trójwartościową tabelkę prawdziwościową dla danego spójnika zdaniowego nazywamy jednorodną, jeśli zawsze wtedy, gdy prawda i fałsz zajmują nagłówkowe pozycje w danym rzędzie lub kolumnie oraz wartość wyznaczona przez prawdę pokrywa się z wartością wyznaczoną przez fałsz, to cały rząd lub kolumna jednorodnie wskazują tę samą wartość, spośród trzech wartości logicznych. Logikę trójwartościową nazywamy jednorodną, gdy tabelki prawdziwościowe dla wszystkich podstawowych spójników zdaniowych są jednorodne.

Spośród wszystkich tabelek dla podstawowych spójników zdaniowych w L_3 tylko tabelka dla spójnika równoważności nie jest jednorodna, z tego względu nie możemy mówić o logice Łukasiewicza, że jest jednorodna.

²³ Wszystkie definicje własności strukturalnych pochodzą od Reschera (tenże, *Many-valued Logic*, McGraw-Hill, New York 1969, s. 55–62).

²⁴ S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, Amsterdam 1952, s. 334.

Tabela prawdziwościowa dla równoważności ma postać:

$p \equiv q$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

Gdyby w środkowym miejscu, zamiast prawdy (1), znajdowała się wartość $\frac{1}{2}$, to wtedy tabela posiadałaby własność jednorodności.

Trójwartościową tabelę prawdziwościową dla danego spójnika zdaniowego nazywamy regularną (w sensie Kleenego), jeśli nie zawiera prawdy lub fałszu w miejscu wyznaczonym przez pary wartości, z których co najmniej jedna jest wartością pośrednią, chyba że prawda lub fałsz pojawia się jednorodnie w całej kolumnie lub rzędzie. Oznacza to, że w regularnej tabelce klasyczna wartość prawdziwościowa występuje w miejscu wyznaczonym przez wartość pośrednią tylko i wyłącznie, gdy jest to wymuszone warunkiem jednorodności. Jeśli tabelki dla wszystkich podstawowych spójników są regularne, to cały system jest regularny.

W systemie L_3 własność regularności nie przysługuje tabelkom dla spójników implikacji oraz równoważności. Tabelki dla pozostałych spójników są regularne.

Tabela prawdziwościowa dla implikacji ma postać:

$p \rightarrow q$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

Gdyby w środkowym miejscu, zamiast prawdy (1), znajdowała się wartość $\frac{1}{2}$, to wtedy tabela byłaby regularna. Podobnie w przypadku tabelki dla równoważności. Trójwartościowa logika nie jest więc regularna.

Mówimy, że tabela trójwartościowa dla danego spójnika zdaniowego jest ciągła, gdy każdy rząd lub kolumna zaczynający się od prawdy a kończący na fałszu (lub odwrotnie) posiada w środkowym miejscu wartość pośrednią. Jeśli tabelki dla wszystkich podstawowych spójników są ciągłe, to cały system trójwartościowy jest ciągły.

Wszystkie tabelki dla podstawowych spójników zdaniowych posiadają własność ciągłości – system L_3 jest ciągły.

Trójwartościowa logika Łukasiewicza spełnia dwie własności strukturalne: normalność i ciągłość. Ponadto tabelki dla spójników: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, posiadają własności jednorodności i regularności, a tabelka dla implikacji jest jednorodna.

4. Interpretacje filozoficzne

Interpretacje trzeciej wartości logicznej można podzielić na epistemologiczne i ontologiczne. Zgodnie z pierwszą interpretacją dodatkowa wartość może się jawić jako wyraz ludzkiej bezsilności, która przejawia się w momencie kontaktu z nieskończonością świata, w wymiarze mikro i makro. Wynika ona z ograniczonych możliwości poznawczych człowieka, dla którego zawsze będą istniały obszary rzeczywistości wymykające się poznaniu. Wprowadzenie w systemie logicznym trzeciej wartości można postrzegać jako pogodzenie się z tymi ograniczeniami i traktowanie ich jako czegoś naturalnego, z czym nie da się walczyć.

Interpretacja ontologiczna nie odwołuje się do człowieka jako podmiotu poznającego, ale do samego świata, który nas otacza. Można powiedzieć, że w jego konstrukcji istnieje coś, co nie jest jeszcze ukształtowane, dokonane. Taka potencjalność dotyczy bytów nieistniejących z konieczności, czyli takich które są, ale mogłyby nie istnieć. Można to określić również w ten sposób: każdy byt jest potencjalnie czymś innym – jedwab jako materia (podłoże zmian) jest w możliwości, aby przyjąć formę i stać się ubraniem. Tak więc tkanina jest potencjalnie wytworną kreacją. Zatem trzecia wartość logiczna może być odpowiednikiem potencjalności istniejącej w świecie.

Pamiętamy, że w trójwartościowym systemie Łukasiewicza trzecia wartość logiczna rozpatrywana jest w kontekście problemu istnienia zdań o przyszłych zdarzeniach niezdeterminowanych. Zdania tego rodzaju charakteryzuje fakt, że możemy o nich powiedzieć, że nie są ani prawdziwe, ani fałszywe. Nie możemy stosować do nich klasycznych wartości prawdy i fałszu. Zdaniom dotyczącym nieokreślonej przyszłości, w momencie ich wypowiedzania, nie odpowiada ani byt, ani niebyt, lecz obiektywna możliwość. Nie zaistniały bowiem przyczyny zdarzenia, o którym mowa jest w zdaniu, nie zaistniały ponadto przyczyny tego, że zdarzenie to nie będzie miało miejsca. Zdanie i jego negacja są w równym stopniu możliwe, zatem nie są konieczne.

Z tej perspektywy poprawna wydaje się interpretacja ontologiczna, która nie odwołuje się do poznawczych zdolności człowieka, ale wskazuje na strukturę bytu jako podłoże, na którym, w zawieszeniu między tym, co istnieje (prawda), a tym, co nie istnieje (fałsz), uobecnia się możliwość w postaci trzeciej wartości logicznej.

Summary

Deliberations on Łukasiewicz Three-Valued Logic

The paper concerns the three-valued propositional logic of Jan Łukasiewicz. Philosophical motivations which led to introduction of the third truth-value, $\mathbf{L}_3$ system analysis, structural properties of its logical connectives and possible philosophical interpretations of the third logical value are presented.