PRACE NAUKOWE Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie
Seria: Filozofia 2010, z. VII

Ryszard Miszczyński

STANISŁAWA LEŚNIEWSKIEGO PIERWSZE ROZWIĄZANIE ANTYNOMII RUSSELLA

Mówiąc o Leśniewskiego analizach antynomii Russella, odróżnia się trzy rozwiązania problemu. Można je scharakteryzować, używając określeń wprowadzonych przez K. Ajdukiewicza[1]. Pierwszy wynik Leśniewski zaprezentował w artykule *Czy klasa klas, nie podporządkowanych sobie, jest podporządkowana sobie*?[2]. Jest to dedukcyjna analiza w stadium przedaksjomatycznym intuicyjnym.

Drugie rozwiązanie zostało opublikowane najpierw w 1915 roku w *Podstawach ogólnej teorii mnogości. I*[3]. Odpowiada ono dedukcyjnej analizie w stadium aksjomatycznym intuicyjnym. Rezultat ten autor zaprezentował powtórnie w fundamentalnej dla swej późniejszej twórczości pracy *O podstawach matematyki*[4]. Całość została włączona w szersze rozważania dotyczące podstawowych pojęć, dokonane zostały drobne korekty, zaprezentowano analizy innych układów aksjomatów i podstawowych pojęć.

Trzecia analiza została opublikowana w latach 1949–1950 przez B. Sobocińskiego[5]. Kontynuuje ona prowadzone badania, koncentrując się na ich logicznej podstawie, tj. konstruowanej przez Leśniewskiego ontologii. Powstająca nauka znajduje się dopiero w stadium przedaksjomatycznym intuicyjnym.

---

[1] K. Ajdukiewicz, *Logika pragmatyczna*, PWN, Warszawa 1975, s. 181–192.

[2] S. Leśniewski, *Czy klasa klas, nie podporządkowanych sobie, jest podporządkowana sobie?* „Przegląd Filozoficzny" 1914, nr 17, s. 73.

[3] Tenże, *Podstawy ogólnej teorii mnogości*, „Filozofia Nauki" 1999, nr 3–4 (27–28), s. 177–207.

[4] Praca ukazała się w kilku częściach: tenże *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny" 1927, nr 30, s. 164–206; 1928, nr 31, z. 3, s. 261–291; 1928, nr 32, z. 1–2, s. 60–101; 1930, nr 33, s. 77–105; 1931, nr 34, s. 142–170.

[5] Tenże, *L'analyse de l'antinomie russeliene par Leśniewski*, „Methodos" 1949, nr 1, s. 94–107, 220–228, 306–316; 1950, nr 2, s. 237–257.

Publikacja pierwszego rozwiązania antynomii Russella należy do grupy tych, które zachwycony możliwościami języka formalnego Leśniewski potępił i nie chciał do nich wracać[6]: „W marnej tej rozprawie dałem wyraz swym poglądom na «antynomię» p. Russella. Nie posiadając jeszcze własnej aksjomatyki teorii klas, powoływałem się tam od przypadku do przypadku na różne tezy z tej dziedziny, w które wierzyłem, a które mi były potrzebne do moich rozważań. Postępowanie moje było pod tym względem najzupełniej podobne do postępowania tych wszystkich «teoretyków mnogości», którzy nie budują swych prac na wyraźnych podstawach matematycznych"[7]. Mimo tej dość negatywnej oceny, jakiej Leśniewski poddał swą pierwszą publikację na temat wymienionej antynomii, warto dokładniej wgłębić się w nią. Tu bowiem tkwią źródła podstawowych intuicji dotyczących najważniejszych pojęć i rozwiązań wykorzystywanych później przez polskiego logika.

W artykule pragnę skoncentrować się na tym pierwszym podejściu polskiego uczonego do sławnej antynomii. Sięgnięcie do niego jest jednak postępowaniem wyraźnie niezgodnym z wolą uczonego. Narusza ją dwojako: raz, bo interesuję się jedną z prac, których opublikowania – jak deklarował – wstydził się. Kolejnym powodem jest sięganie do przesłanek, które – według polskiego uczonego – są nieistotne. W tekście *Podstawy ogólnej teorii mnogości* złożył bowiem następującą deklarację: „system swój traktuję wyraźnie jako system hipotetyczno-dedukcyjny, z czego wypada, iż stwierdzam właściwie jedynie to, że ze zdań, które nazywam «aksjomatami», wynikają zdania, które nazywam «twierdzeniami». «Źródłem» psychicznym moich aksjomatów są moje «intuicje», co znaczy po prostu, że w prawdziwość moich aksjomatów wierzę, dlaczego zaś wierzę, powiedzieć nie umiem, nie znam się bowiem na teorii przyczynowości. «Źródła» logicznego aksjomaty moje nie posiadają [...]"[8]. Wbrew sugerowanemu przez Polaka traktowaniu podstawowych formuł jego systemu jako funkcjonujących *deus ex machina* pragnę jednak skoncentrować się na tym pierwszym rozwiązaniu, które przybliża nas do zrozumienia późniejszych odkryć.

O początkach swego zainteresowania antynomią Leśniewski opowiadał w pierwszej części *O podstawach matematyki* następująco: „W roku 1911 (za moich lat studenckich) wpadła mi w ręce książka p. Jana Łukasiewicza o zasadzie sprzeczności u Arystotelesa. Z książki tej, która wywarła w swoim czasie znaczny wpływ na rozwój intelektualny szeregu polskich «filozofiów» i «filozofujących» uczonych mojego pokolenia, a dla mnie osobiście stanowiła rewe-

[6] Przedstawione zdanie traktowane bywa jako kontrowersyjne. Zob. np. V.F. Sinisi, *Leśniewski's analysis of Russell`s antinomy*, „Notre Dame Journal of Formal Logic" 1976, nr 17, z. 1, s. 32, przypis 5.

[7] S. Leśniewski, *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny" 1927, nr 30, s. 186, przypis 1.

[8] Tenże, *Podstawy ogólnej teorii mnogości*, „Filozofia Nauki" 1999, nr 3–4 (27–28), s. 177–178.

lację pod niejednym względem, dowiedziałem się po raz pierwszy o istnieniu na świecie «logiki symbolicznej», p. Bertranda Russella oraz jego «antynomii», dotyczącej «klasy, nie będącej własnemi elementami»"[9]. W tym okresie młody polski logik był skoncentrowany przede wszystkim na swojej pracy doktorskiej, mimo tego – jak wspomina – „zagadnienia związane z «antynomiami», stały się na lat jedenaście przeszło najbardziej natrętnym tematem moich rozmyślań"[10]. Przyglądając się efektom owych badań, łatwo zauważyć wyraźne zmiany w wykorzystywanym w nich języku. Dojrzałe prace korzystają ze skrajnej formalizacji. Początkowe przeciwnie, opierają się na języku naturalnym. Przypominając swe pierwotne nastawienie i jego źródła, uczony charakteryzował siebie następująco: „Przesiąknięty wpływami logiki Johna Stuarta Milla, na której wyrosłem przedewszystkiem, i «nastawiony» na zagadnienia «ogólnogramatyczne» i logiczno-semantyczne w stylu p. Edmunda Husserla oraz przedstawicieli tzw. szkoły austriackiej"[11]. To podejście jest widoczne w pierwszej, omawianej niżej, analizie.

Antynomia Russella

Jak wspominałem, Leśniewski poznał antynomię Russella z książki Łukasiewicza. Jest tam ona prezentowana następująco: „Klasą zowiemy zbiór elementów czyli indywiduów, mających jakieś cechy wspólne i podpadających skutkiem tego pod jedno pojęcie. [...] O przedmiotach, należących do tej samej klasy, mówimy, że są tej klasie podporządkowane. [...] Można [...] utworzyć pojęcie «klasy, która nie jest sobie podporządkowana». Pod pojęcie to podpadają, jako indywidua, klasy ludzi, trójkątów, parzystych liczb pierwszych itd. Zbiór tych wszystkich klas stanowi «klasę klas, które nie są sobie podporządkowane». Nazwijmy ją krótko klasą K.

Powstaje pytanie: Czy klasa K jest sobie podporządkowana, czy nie? Jeśli przyjmiemy, że klasa K jest sobie podporządkowana, to ponieważ każda klasa, podporządkowana klasie K, nie jest sobie podporządkowana, dochodzimy do wniosku, że klasa K nie jest sobie podporządkowana. A więc powstaje sprzeczność, bo z tego, że klasa K jest sobie podporządkowana, wynika, że nie jest sobie podporządkowana.

Chcąc tę sprzeczność ominąć, musimy przyjąć, że klasa K nie jest sobie podporządkowana. Ale jeśli nie jest sobie podporządkowana, to wtedy należy do klasy K, a więc jest sobie podporządkowana. A zatem i tutaj powstaje sprzeczność, bo z tego, że klasa K nie jest sobie podporządkowana, wynika, że

[9] Tenże, *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny" 1927, nr 30, s. 169.
[10] Tamże, s. 183.
[11] Tamże, s. 169.

jest sobie podporządkowana. – W którąkolwiek zwrócimy się stronę, wszędzie spotykamy sprzeczność. Co począć?"[12].

Łukasiewicz nie próbował rozwiązywać tej trudności. Przypuszczał jednak, „że można znaleźć jakieś rozwiązanie *salvis principiis exclusi tertii et contradictionis*"[13].

Leśniewski, który w 1913 roku opublikował artykuł *Krytyka logicznej zasady wyłączonego środka*[14], nie podzielał przekonania Łukasiewicza o konieczności rozwiązania antynomii przy założeniu uniwersalnej prawdziwości tytułowej zasady. Przeciwnie, głosił twierdzenie ograniczające jej obowiązywanie: „wszelkie zdanie, którego podmiot nic nie oznacza, jest zdaniem fałszywym [...]"[15]. Fałszywe jest zarówno dane zdanie mające podmiot, który nic nie oznacza, jak i jego negacja. Ta teza wskazywała kierunek poszukiwania rozwiązania antynomii. Czy w ogóle istnieje podmiot zdań wyrażających sprzeczne wnioski z rozważań nad odpowiedzią na pytanie: czy klasa K jest sobie podporządkowana? Leśniewski odpowiada – nie. Przekonuje do swego stanowiska, pokazując, że żaden przedmiot nie jest klasą niepodporządkowaną sobie, czyli, jak z tego wynika: nie ma przedmiotu, który nie jest klasą klas niepodporządkowanych sobie.

Klasa dystrybutywna a kolektywna, podporządkowanie

Aby zrozumieć przedstawiane rozwiązanie antynomii przez młodego logika, należy najpierw skoncentrować się na nowym, specyficznym rozumieniu podstawowych pojęć. „Nazywam jakikolwiek przedmiot P przedmiotem podporządkowanym klasie K, jeśli przy pewnym znaczeniu wyrazu «a» zostają zachowane dwa następujące warunki: 1) K jest klasą przedmiotów a; 2) P jest a"[16]. Podawanym w artykule przykładem tak określonej relacji może być dowolny człowiek C, podporządkowany klasie ludzi. Jeśli wyraz „a" ma znaczenie wyrazu „człowiek", to 1) klasa ludzi jest klasą przedmiotów „a", 2) człowiek jest a. Inną ilustracją jest podporządkowanie dowolnej połowy P kuli Q klasie ćwierci kuli Q. Wtedy, jeśli wyraz „a" ma to samo znaczenie co wyraże-

---

[12] J. Łukasiewicz, *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa,* tekst przejrzał, przedmową i przypisami opatrzył Jan Woleński, PWN, Warszawa 1987, s. 119–121.

[13] Tamże, s. 122.

[14] S. Leśniewski, *Krytyka logicznej zasady wyłączonego środka*, „Przegląd Filozoficzny" 1913, nr 16, z. 2–3, s. 315–352.

[15] S. Leśniewski, *Próba dowodu ontologicznej zasady sprzeczności*, „Filozofia Nauki" 1994, nr 2 (6), cyt. za: S. Leśniewski, *Krytyka logicznej zasady wyłączonego środka*, „Filozofia Nauki" 2000, nr 1 (29), s. 147.

[16] S. Leśniewski, *Czy klasa klas...*, s. 64.

nie „połowa kuli Q”, to 1) klasa ćwierci kuli Q, będąc kulą Q, jest jednocześnie klasą połów kuli Q, czyli jest klasą przedmiotów a, 2) połowa kuli Q jest a.

Zupełnie podobne rozumowanie pokazuje, że dowolna ćwierć kuli Q jest podporządkowana klasie połów kuli Q, bo klasa ćwierci kuli Q jest identyczna z kulą Q.

Przedstawione przykłady i ich uzasadnienie wyraźnie kłócą się z dominującym aktualnie rozumieniem zbioru. Współcześnie pojmuje się go w sensie dystrybutywnym. Polski logik korzysta z jego kolektywnej interpretacji. Mówiąc ogólnie o zbiorze, bierzemy pod uwagę zebranie pewnych przedmiotów w całość. Różne są jednak sposoby rozumienia owej całości. Gdy bierzemy pod uwagę wersję kolektywną, to przykładem owej całości może być kupa piasku, która jest złożeniem ziarenek piasku. Podobnie łańcuch składa się z ogniw. Tak pojmowany zbiór jest też konkretnym, dostępnym spostrzeżeniu przedmiotem. Przynależność do niego czy podporządkowanie (takiego sformułowania używali Łukasiewicz i – za nim – Leśniewski w omawianej pracy) to bycie jego częścią, składnikiem. Z tego powodu polski uczony mówi o mereologicznym pojmowaniu zbioru (od greckiego *meros* – część, fragment). Gdy korzystamy ze zbiorów dystrybutywnych, to przynależność do zbioru drzew jest tożsama z byciem drzewem. Pewna gałąź należy do zbioru drzew w sensie kolektywnym, bo jest częścią jednego z tych drzew (więc także i częścią ich całości), nie należy jednak do tego zbioru pojmowanego dystrybutywnie, bo ona sama nie jest drzewem.

Nasz autor zdaje sobie sprawę z trudności, jakie mogą powstawać przy próbie zrozumienia jego przykładów za pomocą zmienionych pojęć. Zwraca uwagę na „*shocking* teoretyczny”, jaki może powodować teza o podporządkowaniu połowy kuli Q klasie ćwierci kuli Q. Przecież żadna połowa kuli nie jest jej ćwiercią. „*Shocking*” spowodowany nie usterkami definicyjnymi, a zmianą i konsekwentnym stosowaniem nowego rozumienia zbioru.

Jeśli mamy kulę Q, to można na nią patrzeć jako na złożenie jej z części (wszystkich ćwierci kuli Q). Jakaś określona połowa P jest częścią tej kuli Q, która jednocześnie jest złożeniem jej z ćwierci. Pewien wycinek kuli Q (tym wycinkiem jest połowa kuli P) stanowi część zebranych w całość innych jej fragmentów (kula Q jest złożeniem ze wszystkich swych ćwierci). Tę sytuację Leśniewski nazywa podporządkowaniem połowy kuli Q klasie ćwierci kuli Q.

Mutatis mutandis można opisać podporządkowanie ćwierci kuli Q klasie jej połów.

Gdyby próbować wyjaśniać, na czym polega podporządkowanie połowy kuli klasie jej ćwierci w języku operacji teoriomnogościowych, to – powiedziałbym – dowolna połowa kuli zawiera się w sumie teoriomnogościowej jej ćwierci.

Pierwsze rozwiązanie antynomii, niestety, nie opiera się jeszcze na precyzyjnie sformułowanej teorii. Intuicje, do jakich odwołuje się autor, można próbować rekonstruować w oparciu o podawane przezeń przykłady. Są one jednak dość niejednorodne. Z jednej strony są to konkrety, np. człowiek, słoń..., z drugiej pojawiają się obiekty abstrakcyjne, np. kula, pół kuli... Przytaczane przykłady to figury geometryczne, które są idealizacjami przedmiotów empirycznych. Z tego powodu, jak można sądzić, podstawowe intuicje klasy i podporządkowania zostały zaczerpnięte z empirycznego świata. Warto – jak sądzę – przypomnieć, że polski logik nie jest odkrywcą kolektywnego pojmowania klasy. Na tę możliwość zwracali wcześniej uwagę, np. Frege, Husserl, Russell. Leśniewski jako pierwszy zaczął wykorzystywać to pojęcie w ścisłych rozumowaniach logicznych, jako pierwszy zbudował formalną teorię tych zbiorów. Widząc, jakie problemy powstają przy dystrybutywnym rozumieniu zbioru[17], w omawianym artykule spróbował wykorzystać pojęcie konkurencyjne.

Odpowiednio do podanej wyżej definicji podporządkowania, uczony stosując zwykłe prawa negacji, wprowadza określenie przeczące: „[...] nazywam jakikolwiek przedmiot P' nie podporządkowanym klasie K, jeśli przy żadnym znaczeniu wyrazu «a» nie zostają zachowane dwa następujące warunki: 1) K jest klasą przedmiotów a; 2) P' jest a (to znaczy, jeśli przy każdym znaczeniu wyrazu «a» przynajmniej jeden z tych warunków jest niespełniony)"[18]. Jako przykład można podać za autorem: dowolny słoń S jest niepodporządkowany klasie ludzi, albowiem – jak widać – przy żadnym znaczeniu wyrazu «a» nie są spełnione jednocześnie oba warunki: 1) klasa ludzi jest klasą przedmiotów a, 2) słoń S jest a.

W sposób podobny, jak w przytoczonych wyżej definicjach podporządkowania (niepodporządkowania) przedmiotu klasie, autor określa znaczenie terminów „klasa, podporządkowana sobie" i „klasa, nie podporządkowana sobie". Jako przykład klasy podporządkowanej sobie Leśniewski podaje „klasę przedmiotów, znajdujących się w tej chwili w moim pokoju". Uzasadnia to następująco: jeśli użyjemy wyrazu «a» w tym samym znaczeniu, co wyrażenia „przedmiot znajdujący się w tej chwili w moim pokoju", to 1) klasa przedmiotów, znajdujących się w tej chwili w moim pokoju, jest klasą przedmiotów a, oraz 2) klasa przedmiotów znajdujących się w tej chwili w moim pokoju jest a, po-

[17] Pierwszą publikacją dotyczącą m.in. trudności z poprawnym pojmowaniem zbioru dystrybutywnego była recenzja pisana w tym samym czasie, co omawiane rozwiązanie: S. Leśniewski, *Teoria mnogości na „podstawach filozoficznych" Benedykta Bornsteina.* (*Recenzja rozprawy dra Bornsteina pt. „Podstawy filozoficzne teorii mnogości"*), „Przegląd Filozoficzny" 1914, nr 17, z. 1, s. 488–507.

[18] S. Leśniewski, *Czy klasa klas...*, s. 65.

nieważ klasa tych przedmiotów sama stanowi przedmiot znajdujący się w tej chwili w moim pokoju[19].

Rozwiązanie Leśniewskiego

Leśniewski nie podaje przykładu klasy niepodporządkowanej sobie, albowiem – wyjaśnia – nie ma takich klas, każda klasa jest sobie podporządkowana. Dowód nie wprost ma dość techniczny charakter. Autor prezentuje formalną metodę przedstawienia dowolnej klasy jako podporządkowanej sobie:

„Przypuśćmy, że jakaś klasa K jest nie podporządkowana sobie; znaczy to [...] że *przy żadnym znaczeniu wyrazu «a» nie zostają zachowane oba warunki – 1*) *K jest klasą* (*przedmiotów*) *a, 2*) *K jest a* (I) (Przypis autora: „Znak «(I)» oznacza tezę podkreśloną.). Klasa K jest z koniecznością klasą jakichś przedmiotów n; oznaczmy klasę przedmiotów n za pomocą wyrażenia «Σn»; na podstawie prawa tautologii – Σn = Σn + Σn (Przypis autora: Por. np. Louis Conturat, «*L`algebre de la logique*», 1905, str. 13.) (II); jak już zauważyłem [...], wyrażenie «klasa przedmiotów n» jest symbolem tego samego przedmiotu, co wyrażenie «klasa klas przedmiotów n», inaczej – wyrażenie «Σn» jest symbolem tego samego przedmiotu, co wrażenie «ΣΣn»; podstawiając wyrażenie «ΣΣn» do formuły (II) zamiast jednego z wyrażeń «Σn», otrzymujemy: Σn = ΣΣn + Σn (III); wiadomo, że suma logiczna dwóch klas, z których jedna jest klasą (przedmiotów) a, a druga klasą klas (przedmiotów) b – jest klasą (przedmiotów) a albo b; tak więc ΣΣn + Σn, to znaczy suma logiczna dwóch klas – ΣΣn i Σn – z których jedna jest klasą przedmiotów Σn, a druga klasą przedmiotów n, jest klasą (przedmiotów) Σn albo n; inaczej – ΣΣn + Σn = Σ(Σn albo n) (IV); ponieważ Σn = ΣΣn + Σn (III), i ΣΣn + Σn = Σ(Σn albo n) (IV), więc Σn = Σ(Σn albo n) (V); ponieważ zaś K jest to właśnie Σn, więc K jest Σ(Σn albo n) (VI); ponieważ K jest Σn, więc – na podstawie zasad symplifikacji i sylogizmu – K jest Σn albo n (VII); użyjmy wyrazu «a» w znaczeniu wyrażenia «Σn albo n»; podstawiając do (VI) i (VII) zamiast wyrażenia «Σn albo n» wyraz «a», otrzymamy: K jest Σa (VIII), K jest a (IX); tak więc – *przy pewnym znaczeniu wyrazu «a», a mianowicie wtedy, gdy wyraz «a» jest użyty w znaczeniu wyrażenia «Σn albo n», zostają zachowane oba warunki – 1*) *K jest klasą* (*przedmiotów*) *a, 2*) *K jest a* (X) (Przypis autora: Znak «X» oznacza tezę podkreśloną.) Porównując twierdzenia – (I) i (X), zauważamy, że twierdzenia te są zdaniami sprzecznemi. [...] Więc musi być fałszem prowadzące do niego założenie, iż pewna klasa K jest nie podporządkowana sobie, skoro zaś tak, to *każda klasa jest podporządkowana sobie*”[20]. Za

---

[19] Tamże, s. 71.

[20] Tamże, s. 71–72. Warto zauważyć, że ta dość skomplikowana konstrukcja ma w rzeczywistości służyć uzasadnieniu ogólności intensji nazwy „a”. Wskazuje na przedmioty Σn albo n_1, Σn albo

pomocą kolejnego dowodu nie wprost Leśniewski uzasadnia wniosek, że żaden przedmiot nie jest klasą, niepodporządkowaną sobie. Stąd na końcu wyciąga wniosek: żaden przedmiot nie jest klasą klas niepodporządkowanych sobie.

Otrzymana konkluzja wraz z przytaczanym już przekonaniem – „wszelkie zdanie, którego podmiot nic nie oznacza, jest zdaniem fałszywym" – stanowi poszukiwane rozwiązanie antynomii Russella. Leśniewski twierdzi: „zapytanie, «czy klasa klas, niepodporządkowanych sobie, jest podporządkowana sobie?» nie dopuszcza ani twierdzącej, ani przeczącej prawdziwej odpowiedzi"[21]. Do aporii prowadzi sofistyczne rozumowanie wykorzystujące tezy, którym nie odpowiada żadna rzeczywistość. Młody logik stara się uzupełnić podane rozwiązanie wskazaniem błędów odpowiedzialnych za czysto językowy charakter owej sprzeczności. W tym celu najpierw precyzyjnie rekonstruuje owo antynomiczne rozumowanie, tj. wyraźnie wyodrębnia jego istotne części, akcentuje wykorzystywanie rozumowań nie wprost. Mimo cytowanej na wstępie interpretacji Łukasiewicza, przytaczam je, ponieważ ułatwia śledzenie analizy Leśniewskiego.

Jeśli przyjmuje się, że 1) klasa klas, niepodporządkowanych sobie, jest podporządkowana sobie, to to zewnętrzne podporządkowanie świadczyć ma o jej byciu klasą niepodporządkowaną sobie, a to jest sprzeczne z przyjętym na wstępie założeniem; jeśli uznamy 2) tj. klasa klas, niepodporządkowanych sobie, nie jest podporządkowana sobie, to przyjmujemy, że interesująca nas klasa nie jest klasą niepodporządkowaną sobie, a więc jest sobie podporządkowana, co znów jest sprzeczne z przyjętym założeniem 2). Skoro hipoteza 1) okazała się być fałszywą, to prawdą jest, że klasa klas, niepodporządkowanych sobie, nie jest podporządkowana sobie (I); ponieważ hipoteza 2) także jest fałszywa, więc jest prawdą, że klasa klas, niepodporządkowanych sobie, jest podporządkowana sobie (II). Tezy (I) i (II) są sprzeczne: klasa klas, niepodporządkowanych sobie, jest podporządkowana sobie i zarazem nie jest podporządkowana sobie.

W przytoczonym rozumowaniu Leśniewski dostrzega dwa błędy: pierwszy, związany z błędnym pojmowaniem zbioru: niepoprawne jest wnioskowanie, które z hipotezy 1) prowadzi do sprzecznej z nią tezy. Jeśli klasa klas, niepodporządkowanych sobie, jest podporządkowana sobie, to nie wynika z tego, że jest jedną z klas niepodporządkowanych sobie. Takie rozumowanie opiera się bowiem na nieprawdziwym twierdzeniu, że każdy przedmiot, podporządkowany klasie przedmiotów n, jest n; drugi błąd ma charakter logiczny: z fałszywości hipotezy 1) nie można wyprowadzać wniosku o prawdziwości (I). Leśniewski

n_2,... Przecież jako „a" mogłaby występować taka nazwa jednostkowa, której desygnatem jest klasa K. Ona wyraźnie spełniałaby definicyjne wymagania wskazujące podporządkowanie klasy K samej sobie.

[21] Tamże, s. 73.

neguje uniwersalne obowiązywanie zasady wyłączonego środka, obcinając ją do tezy następującej: „wszelkie zdanie, posiadające oznaczający podmiot i współoznaczające orzeczenie, jest prawdziwe, jeśli kontradyktoryczne względem niego zdanie jest fałszywe”[22]; skoro hipoteza 1) jest zdaniem, którego podmiot nic nie oznacza, z jej fałszywości nie można wyciągać wniosku o prawdziwości jej negacji.

Młody logik pointuje swoje analizy tryumfalnie: „Tak tedy i przy takich warunkach «paradoks» Russella zostaje «uśmiercony». «Paradoks» ten przyczynił się do pewnego wyklarowania podstaw teorii klas, i to jest jego historyczna zasługa... Część więc jego pamięci!”[23].

Oczywiście ów tryumfalistyczny ton możemy aktualnie uznać za przedwczesny, a zbytni optymizm tłumaczyć młodym wiekiem autora (28 lat). Chyba miał rację Łukasiewicz, oczekując rozwiązania antynomii zachowującego zasady wyłączonego środka i sprzeczności. Niezależnie od filozoficznych kontrowersji związanych z naruszaniem podstawowych praw logiki, ich powszechne obowiązywanie zmniejsza prawdopodobieństwo akceptacji proponowanego tutaj rozwiązania. Leśniewski, kwestionując nieograniczone wykorzystywanie zasady wyłączonego środka[24], osłabił znaczenie swej pierwszej próby rozwiązania antynomii.

Naturalność koncepcji klas Leśniewskiego

W dalszej kolejności chcę skoncentrować się na tej części diagnozy Leśniewskiego, która dostrzega źródło antynomii w błędnym rozumieniu klasy i podkreśla znaczenie omawianej próby dla „klarowania podstaw teorii klas”. Może nie wpłynęła ona bezpośrednio na szybko rozwijającą się teorię Cantora, ale stanowiła ważną przesłankę dla powstania jej konkurencyjnego odpowiednika. W omawianej publikacji autor bowiem już wyraźnie sformułował podstawowe intuicje swojej mereologii. Tu – co pokazywałem – Leśniewski po raz pierwszy w szeroko rozumianych badaniach matematycznych wykorzystał nowe, odmienne niż u Cantora, rozumienie klasy. Posiadała ona, co oczywiste, inne własności niż obiekt badany przez niemieckiego uczonego. Na trzy z nich pragnę zwrócić uwagę.

Wyliczenianie chcę rozpocząć od tej cechy klas kolektywnych, której nieznajomość – według Leśniewskiego – leżała u podstaw sformułowania antyno-

[22] S. Leśniewski, *Krytyka logicznej zasady wyłączonego środka...*, s. 162.
[23] S. Leśniewski, *Czy klasa klas...*, s. 75.
[24] O filozoficznych analizach, które prowadziły Leśniewskiego do żądania ograniczenia zakresu wykorzystywania zasady wyłączonego środka zob. R. Miszczyński, *O symbolizacji rzeczywistości w języku. Rozważania z wczesnych prac S. Leśniewskiego*, „Prace Naukowe Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie. Seria: Filozofia”, z. 6, red. tenże, Częstochowa 2009, s. 103–114.

mii Russella (wymieniona została jako pierwszy błąd). O ile zawsze prawdziwa jest teza: a jest podporządkowany klasie przedmiotów a, to nie zawsze musi obowiązywać twierdzenie: jeśli n jest podporządkowane klasie przedmiotów a, to n jest a.

Przytoczyłem, za autorem rozwiązania antynomii, rozumowanie uzasadniające podporządkowanie dowolnej połowy P kuli Q klasie ćwierci kuli Q. Łatwo jednak na podstawie powyższego przykładu zauważyć, że nie można rozsądnie dojść do wniosku uznającego połowę kuli za jej ćwierć.

W teorii mnogości zbiorów dystrybutywnych, jak łatwo zauważyć, nie jest prawdziwe twierdzenie o przynależności połowy kuli do klasy jej ćwierci (bo żadna połowa nie jest ćwiercią), ale uzasadniona jest teza: jeśli n należy do klasy ćwierci kuli, to n jest ćwiercią kuli (bo w klasie tej znajdują się tylko ćwierci kuli).

Klasycznymi prawdziwymi analogonami owych twierdzeń mogą być następujące: 1) $a_i \in \{a_1, a_2, a_3,...\}$, dla i = 1, 2,...; 2), jeśli $x \in \{a_1, a_2, a_3,...\}$, to dla pewnego i, $x = a_i$.

Wspominane wyżej konstrukcje teoriomnogościowe opierają się na charakterystycznym dla tradycyjnego pojmowania klasy (zbioru) odróżnieniu między obiektem x a klasą, której jedynym elementem jest ten obiekt ($x \neq \{x\}$). Podobnie dalej, klasa, której elementem jest obiekt x, różni się od klasy, której elementem jest klasa, w której znajduje się x ($\{x\} \neq \{\{x\}\}$), itd. Dystynkcja jest łatwo zrozumiała, jeśli odwołamy się do szkatułkowej czy kontenerowej intuicji klasy. Ona także lepiej unaocznia wspominaną wyżej zasadność wprowadzania klasy pustej. Młody polski logik rezygnuje jednak z korzystania z tych wielostopniowych klas. Twierdzi: „[...] «Klasa (przedmiotów) a» i «klasa klas (przedmiotów) a» – są dwoma różnemi symbolami tego samego przedmiotu, a mianowicie przedmiotu, który jest zbiorem wszystkich a [...]”[25]. Tę niemożliwość tworzenia klas wyższego rzędu wyrażała teza o tym, że każda klasa jest sobie podporządkowana. Dobrą ilustracją tej tezy może być podawany przez autora następujący przykład: klasa przedmiotów znajdujących się w tej chwili w moim pokoju jest klasą podporządkowaną sobie. Jeśli bowiem użyjemy wyrazu „a” jako równoznacznego z wyrażeniem „przedmiot znajdujący się w tej chwili w moim pokoju”, to 1) klasa przedmiotów, znajdujących się w tej chwili w moim pokoju, jest klasą (przedmiotów) a, 2) klasa przedmiotów znajdujących się w tej chwili w moim pokoju jest a (bo ten zespół przedmiotów stanowi przedmiot znajdujący się aktualnie w moim pokoju).

[25] S. Leśniewski, *Czy klasa klas...*, s. 69.

Do tej nieodróżnialności klasy od klasy klas prowadzą też wnioski wypływające z tezy, że każda klasa jest sobie podporządkowana. Przypuśćmy, że klasa (przedmiotów) a różni się od klasy klas (przedmiotów) a.

Gdybyśmy więc wzięli pewną klasę, której, zgodnie z przytoczoną tezą, podporządkowana jest ona sama i to, co jest jej podporządkowane, to gdyby było jej jeszcze coś innego podporządkowane (zawierałaby ów hipotetyczny dodatek sprawiający, że staje się klasą wyższego stopnia), to otrzymalibyśmy sprzeczność. Ona składałaby się z siebie i jeszcze z czegoś innego.

Dużą wagę do podkreślanej wyżej różnicy między klasą a jej elementem przywiązywał wspominany już Russell. Uważał odróżnienie to za konstytutywne dla dystrybutywnego pojmowania klasy. Twierdził: „[…] klasy nie mogą być rzeczami tego samego rodzaju, co ich elementy […]”[26]. Odwrotnie przy podejściu kolektywnym, „[...] bardzo trudno zrozumieć, jak to się dzieje, że klasa, która ma tylko jeden element, nie jest identyczna z tym jednym elementem”[27].

Leśniewski, rozwiązując antynomię, doszedł do wniosku, że żaden przedmiot nie jest klasą klas niepodporządkowanych sobie, korzystając z udowodnionej wcześniej tezy: żaden przedmiot nie jest klasą, niepodporządkowaną sobie. W standardowej teorii mnogości (Cantora) powiedzielibyśmy: klasa klas nie podporządkowanych sobie jest klasą pustą. Ta różnica, którą – na pierwszy rzut oka – można traktować jako zwykły problem terminologiczny, ma jednak głębsze znaczenie. Mimo pozornej nicości kryjącej się za takim obiektem może on służyć jako budulec w tworzeniu innych obiektów matematycznych. Wspomniana już szkatułkowa intuicja klasy uzasadnia istnienie klasy pustej (szkatułki, w której nie ma nic). Tak czyni się, np. pokazując istnienie nieskończonej ilości zbiorów, tj. tworząc kolejno Ø, {Ø}, {{Ø}}, {{{Ø}}}... Przy tym wyliczaniu nikt nie traktuje tych napisów tylko jako użytecznej formy wypowiedzi. Wbrew konstrukcyjnemu znaczeniu klasy pustej w tradycyjnej teorii mnogości Leśniewski nie dopuszcza takiego obiektu. Uważa za niezrozumiałe istnienie klasy zbudowanej z niczego, nie ma sensu mówienie o składaniu wielu obiektów, których nie ma. Z poglądem tym w zasadzie zgadzają się inni uczeni. Nawet Russell, sam będąc zwolennikiem koncepcji dystrybutywnej, nie widzi możliwości uznania istnienia kolektywnej klasy pustej: „Nie możemy brać klas w sensie czysto ekstensjonalnym po prostu jako agregatów czy konglomeratów [za pomocą takich terminów określane są klasy kolektywne – przyp. RM]. Jeżeli spróbujemy to uczynić, to znajdziemy, że niepodobna zrozumieć, jak może istnieć taka klasa jak klasa zerowa, która w ogóle nie ma żadnego elementu [...]”[28]. Podobną myśl,

[26] B. Russell, *Wstęp do filozofii matematyki,* tł. Cz. Znamierowski, PWN, Warszawa 1958, s. 269.
[27] Tamże, s. 268.
[28] Tamże.

sprowadzającą do absurdu przekonanie o istnieniu kolektywnych klas pustych, głosi obrazowe porównanie Fregego: jeśli spalimy drzewa w lesie, to spalimy także las.

Na zakończenie chciałem wyraźnie podkreślić, wypływającą z wyliczonych cech dostrzeganych przez Leśniewskiego, naturalność szkicowanej w omawianym artykule koncepcji zbiorów. Naturalność polegającą nie tylko na podobieństwie klas do przedmiotów otaczającego świata, ale i na silnym związku między klasami a podporządkowanymi im przedmiotami (ich elementami). W rozwijanej śladem Cantora teorii wyraża go przyjmowany aksjomat ekstensjonalności: dwa zbiory zawierające takie same elementy są identyczne. Sam zbiór jednak charakteryzuje się pewną trwałością i niezależnością od elementów. Zgodnie jednak z jego „szkatułkowym" modelem sam zbiór pozostanie, chociaż znikną jego elementy, co w przypadku interpretacji kolektywnej jest niemożliwe i co można uważać za jej zasadniczą przewagę.

W zakończeniu omawianej publikacji Leśniewski ogłosił, że „paradoks" Russella został „uśmiercony". Młody uczony, omawiając to głośne rozumowanie, używał nazwy „paradoks" opatrzonej cudzysłowem. Pojawiający się a zasygnalizowany przez umieszczenie odpowiednich znaków graficznych, pewien dystans wobec wykorzystywanej nazwy nie wynikał tylko z przytoczenia powszechnie używanego określenia. To także dystans wobec jego treści, kwestionowanie jej adekwatności do analizowanego problemu. Skoro żaden przedmiot nie jest klasą niepodporządkowaną sobie, więc słowa rzekomo wyrażające ową problematyczną sytuację do niczego się nie odnoszą. One wcale nie opisują jakiegoś rzeczywistego wykluczania współistnienia pewnych relacji między obiektami, które wymagałoby intelektualnej pracy nad jego wyjaśnieniem. Mamy raczej do czynienia z formalną sprzecznością, wynikającą z nieostrożnego posługiwania się językiem. Jako taka w ogóle nie zasługuje na miano „paradoksu" czy „antynomii"[29].

[29] Por. S. Leśniewski, *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny" 1927, nr 30 s. 188–189.

Ryszard Miszczyński

STANISLAW LESNIEWSKI'S FIRST SOLUTION OF THE RUSSELL'S ANTINOMY

Summary

The text discusses Stanislaw Lesniewski's first attempt to solve Russell's antinomy. It is based on the intuitive understanding of the collective set.