NARODOWA AGENCJA
WYMIANY AKADEMICKIEJ

Publikacja finansowana przez NAWA
w ramach działań komplementarnych do tych podejmowanych przez UJD w ramach sojuszu COLOURS

SKRYPT Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ

Matematyka dyskretna dla studentów kierunku informatyka

Renata Kawa

UNIWERSYTET JANA DŁUGOSZA W CZĘSTOCHOWIE

Uniwersytet Jana Długosza w Częstochowie

Matematyka dyskretna dla studentów kierunku informatyka

Renata Kawa

Częstochowa 2024

Recenzent
dr Rafał Kucharski

Redaktor Naczelna Wydawnictwa
mgr Paulina Piasecka-Florczyk

Redaktor statystyczny
dr Jarosław Kowalski

Projekt okładki i korekta
dr hab. Bożena Woźna-Szcześniak

Redakcja techniczna
dr Renata Kawa

ISBN 978-83-67984-20-1

Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Jana Długosza w Częstochowie
42-200 Częstochowa, al. Armii Krajowej 36A
www.ujd.edu.pl
e-mail: wydawnictwo@ujd.edu.pl

Spis treści

Oznaczenia

Będziemy używać następujących oznaczeń:

$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych,

$\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych,

$\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych (od 1),

$\mathbb{N}_0$ – zbiór liczb naturalnych wraz z 0,

$\mathbb{P}$ – zbiór liczb pierwszych,

$|X|$ – liczba elementów zbioru X,

$\mathcal{P}(X)$, 2^X – rodzina wszystkich podzbiorów zbioru X,

$\mathcal{D}(a)$ – zbiór dzielników całkowitych liczby a, gdzie $a \in \mathbb{Z}$,

$m \mid a$ – m dzieli a, gdzie $m, a \in \mathbb{Z}$,

$m \nmid a$ – m nie dzieli a, gdzie $m, a \in \mathbb{Z}$.

Alfabet grecki:

A	α	alfa	N	ν	ni
B	β	beta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	O	o	omikron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ϵ, ε	epsilon	P	ρ, ϱ	ro
Z	ζ	zeta	Σ	σ, ς	sigma
H	η	eta	T	τ	tau
Θ	θ, ϑ	theta	Υ	υ	ypsilon
I	ι	jota	Φ	ϕ, φ	phi
K	κ	kappa	X	χ	chi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	mi	Ω	ω	omega

Wstęp

Matematyka dyskretna to część matematyki zajmująca się strukturami dyskretnymi. Słowo „dyskretny" należy tu rozumieć w znaczeniu „nieciągły", „oddzielony od siebie" (w języku angielskim mamy słowo *discrete*, w odróżnieniu od *discreet* oznaczającego coś, co nie rzuca się w oczy lub ma pozostać w tajemnicy). W bardziej restrykcyjnym znaczeniu termin „dyskretny" rozumie się również jako „skończony", co wskazuje, że obiektem zainteresowania matematyki dyskretnej będą struktury i procesy skończone. W ten sposób matematyka dyskretna różni się zasadniczo od analizy matematycznej, teorii równań różniczkowych czy topologii, zainteresowanych głównie pojęciami ciągłymi i obiektami nieskończonymi.

Konkretniej, matematyka dyskretna opiera swoje podstawy na logice, teorii zbiorów i teorii liczb, a główny działy wchodzące w jej zakres to kombinatoryka i teoria grafów. Stosuje się ją w takich obszarach z pogranicza matematyki i informatyki jak: algorytmika, kryptografia, teoria kodowania czy teoria obliczeń. Matematyka dyskretna jest niezbędna dla zrozumienia teoretycznych podstaw informatyki. Dogłębne zrozumienie zagadnień matematyki dyskretnej pozwala na sprawne rozwiązywanie złożonych problemów informatycznych i tworzenie efektywnych algorytmów.

Podręcznik ten ma na celu przybliżenie najważniejszych pojęć matematyki dyskretnej wszystkim zainteresowanym tą dziedziną, w szczególności studentom pierwszego roku studiów licencjackich kierunku informatyka. Poznając podstawy matematyki dyskretnej, student rozwija umiejętności rozwiązywania problemów, które mają zastosowanie w różnych praktycznych scenariuszach.

Materiał do skryptu „Matematyka dyskretna dla studentów kierunku informatyka" jest tak dobrany, aby porządkował wiedzę z tej dziedziny nabytą w szkole średniej i uzupełniał ją o tematy niezbędne do studiowania informatyki na dalszych etapach kształcenia. Niniejszy skrypt obejmuje podstawy logiki (rozdział 1), elementy teorii liczb (rozdział 2) oraz wstęp do kombinatoryki (rozdział 3). Każdy rozdział jest uzupełniony o zestaw zadań, do większości których dostarczone są także odpowiedzi. Całość uzupełniona jest o przykładowe pytania egzaminacyjne (rozdział 4).

Rozdział 1

Elementy logiki

W tym rozdziale przedstawimy wybrane elementy logiki takie jak podstawy rachunku zdań, rachunku kwantyfikatorów, teorii zbiorów i teorii relacji. Przedstawimy także notację dla sum i iloczynów wraz z wzorami przydatnymi przy stosowaniu tej notacji. Kolejne rozdziały krótko omawiają zasadę indukcji matematycznej oraz podstawowe funkcje całkowitoliczbowe: podłogę i sufit. Duża część treści zawartych w tym rozdziale jest powtórzeniem wiadomości ze szkoły średniej i zapewne nie przysporzy czytelnikowi problemów. Wyjątek mogą stanowić podrozdziały dotyczące relacji oraz indukcji matematycznej, które to tematy zwykle nie są omawiane w szkole średniej.

1.1. Podstawy rachunku zdań

W logice klasycznej rozróżniamy dwie wartości logiczne: prawdę i fałsz. Symbolem prawdy jest 1, a symbolem fałszu jest 0. Rozpoczniemy od podstawowej definicji i przykładów, które ją ilustrują.

Definicja 1.1. Zdaniem logicznym nazywamy dowolne zdanie, któremu można nadać wartość logiczną: prawdę lub fałsz.

Przykład 1.2. Przykładami zdań logicznych są:

1. $9 - 3 = 5$ (fałsz).
2. $3 + 4 > 6$ (prawda).
3. Każdy kwadrat jest prostokątem (prawda).
4. Liczba $\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną (fałsz).
5. Nicea jest stolicą Francji (fałsz).
6. Mieszko I był królem Hiszpanii (fałsz).
7. Ziemia ma dokładnie jeden księżyc (prawda).
8. Kangury żyją na Antarktydzie (fałsz).

Przykład 1.3. Przykłady zdań, które nie są zdaniami logicznymi:

1. pytania: Czy w Afryce żyją krokodyle?
2. zdania rozkazujące: Posprzątaj swój pokój!

Należy zwrócić uwagę, że istnieją stwierdzenia, które są zdaniami logicznymi, pomimo że w danej chwili, czy też przy obecnym stanie naszej wiedzy, nie jesteśmy w stanie ocenić ich wartości logicznej. Na przykład takim zdaniem jest: „Na Marsie żyją bakterie". Nie jesteśmy w stanie określić wartości logicznej tego zdania, ponieważ nie pozwala nam na to stan naszej wiedzy o Marsie. Jednak jest to zdanie logiczne, którego wartość logiczną być może będziemy w stanie ocenić w przyszłości.

Zdania logiczne możemy łączyć ze sobą tworząc zdania złożone. Do budowania zdań złożonych używamy spójników (operatorów) logicznych. Najczęściej używane spójniki logiczne zostały zebrane w tabeli 1.1. Wartość logiczna zdania złożonego zależy od wartości jego zdań składowych oraz spójników wykorzystanych do jego utworzenia. Negacja jest operatorem jednoargumentowym, która zmienia wartość logiczną negowanego zdania na przeciwną (tabela 1.2). Pozostałe operatory są dwuargumentowe, a wartości zdań złożonych utworzonych z ich użyciem zaprezentowane są w tabeli 1.3.

Tabela 1.1: Spójniki logiczne

symbol	nazwa	użycie	jak czytamy
$\neg$, $\sim$	negacja (zaprzeczenie)	$\neg p$, $\sim p$	nie p
$\vee$	alternatywa	$p \vee q$	p lub q
$\veebar$	alternatywa wykluczająca	$p \veebar q$	p albo q
$\wedge$	koniunkcja	$p \wedge q$	p oraz q, p i q
$\Rightarrow$	implikacja	$p \Rightarrow q$	jeśli p, to q
$\Leftrightarrow$	równoważność	$p \Leftrightarrow q$	p wtedy i tylko wtedy, gdy q

W implikacji „$p \Rightarrow q$" zdanie p nazywamy **poprzednikiem** implikacji, a zdanie q **następnikiem** implikacji.

Tabela 1.2: Negacja

p	$\neg p$
1	0
0	1

Tabela 1.3: Spójniki dwuargumentowe

p	q	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1

Przykład 1.4. Określimy wartości poniższych złożonych zdań logicznych:

1. Nieprawda, że Ziemia jest płaska.

   Oznaczmy zdanie „Ziemia jest płaska” symbolem p. Zdanie p jest fałszywe, stąd na podstawie tabeli 1.2 zdanie $\neg p$ jest prawdziwe.

2. W Afryce żyją czarno-białe zebry i różowe hipopotamy.

   Powyższe zdanie jest zapisane w języku naturalnym. Chcąc ocenić wartość logiczną tego zdania powinniśmy zmienić jego formę na bardziej precyzyjną: „W Afryce żyją czarno-białe zebry i w Afryce żyją różowe hipopotamy”. Oznaczmy zdanie „W Afryce żyją czarno-białe zebry” symbolem p, a zdanie „W Afryce żyją różowe hipopotamy” symbolem q. Zdanie p jest prawdziwe, zdanie q jest fałszywe, zatem (tabela 1.3, kolumna 5, wiersz 4) koniunkcja $p \wedge q$ jest fałszywa.

3. Jeśli sowy są ssakami, to motyle są owadami.

   Oznaczmy zdanie „sowy są ssakami” symbolem p, a zdanie „motyle są owadami” symbolem q. Zdanie p jest fałszywe, zdanie q jest prawdziwe, zatem (tabela 1.3, kolumna 6, wiersz 3) implikacja $p \Rightarrow q$ jest prawdziwa.

4. $3 \mid 10 \Leftrightarrow (2+3) > 4$

   Oznaczmy zdanie „$3 \mid 10$” symbolem p, a zdanie „$(2+3) > 4$” symbolem q. Zdanie p jest fałszywe, zdanie q jest prawdziwe, stąd (tabela 1.3, kolumna 7, wiersz 3) zdanie $p \Leftrightarrow q$ jest fałszywe.

Symbole p i q w tabelach 1.1, 1.2 i 1.3 (str. 7) to **zmienne zdaniowe**, czyli zmienne, pod które możemy podstawiać dowolne zdania logiczne. Wyrażenia zbudowane ze zmiennych zdaniowych i spójników logicznych (oraz pomocniczo nawiasów) nazywamy **formułami** lub **zdaniami rachunku zdań**.

Definicja 1.5. Prawo logiczne (**prawo rachunku zdań**, **tautologia**) to formuła rachunku zdań, która jest zawsze prawdziwa, to znaczy jest prawdziwa po podstawieniu za zmienne zdaniowe dowolnych zdań logicznych.

Zaprezentujemy wybrane tautologie wraz z ich nazwami:

1. prawo podwójnego zaprzeczenia:
$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p,$$

2. prawo wyłączonego środka:
$$p \vee \neg p,$$

3. prawa łączności alternatywy i koniunkcji:
$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r), \quad (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r),$$

4. prawa przemienności alternatywy i koniunkcji:
$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p, \quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p,$$

5. prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy i alternatywy względem koniunkcji:
$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r), \quad (p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r),$$

6. prawo przechodniości implikacji:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r),$$

7. prawo zaprzeczenia implikacji:

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [p \wedge (\neg q)],$$

8. prawo transpozycji:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\neg q) \Rightarrow (\neg p)],$$

9. prawa de Morgana:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)\,, \qquad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \ \wedge \neg q)\,,$$

10. reguła odrywania:

$$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q,$$

11. prawo zastępowania równoważności:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p).$$

Przykład 1.6. Przedstawimy jedną z metod wykazywania, że podana formuła jest tautologią. Rozważmy prawo przechodniości implikacji:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r).$$

W powyższej formule mamy trzy zmienne logiczne: p, q, r. Wszystkie możliwe wartości tych zmiennych wpisujemy do tabeli w kolejnych wierszach tak, jak widać poniżej:

p	q	r
0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Następnie w nagłówkach kolejnych kolumn wpisujemy wszystkie coraz bardziej złożone formuły tworzące prawo przechodniości implikacji:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
1	0	0					
0	1	1					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Na koniec wypełniamy tabelę kierując się zasadami działania spójników logicznych (tabele 1.2 i 1.3, str. 7). Zauważmy, że w ostatniej kolumnie, w której mamy wartości prawa przechodniości implikacji dla wszystkich możliwych wartości zmiennych p, q i r, występują wyłącznie symbole prawdy, co oznacza, że podane zdanie jest tautologią.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

1.2. Podstawy rachunku kwantyfikatorów

Podrozdział ten rozpoczniemy od wprowadzenia pojęcia funkcji zdaniowej. **Funkcja zdaniowa** (inaczej **formuła zdaniowa**, **forma zdaniowa** lub **predykat**) zmiennej x to wyrażenie, w którym występuje zmienna x, a które staje się zdaniem logicznym, gdy w miejsce x podstawimy element pewnego zbioru, który nazywamy dziedziną lub zakresem zmienności zmiennej x. W analogiczny sposób określamy funkcje zdaniowe większej liczby zmiennych. Na przykład, wyrażenie „x jest liczbą dodatnią" jest funkcją zdaniową, które po podstawieniu za x dowolnej liczby rzeczywistej większej od zera, np. 5 lub π, staje się zdaniem prawdziwym, a w przeciwnym przypadku staje się zdaniem fałszywym.

Kwantyfikatory są kolejnym elementem języka matematycznego, znacznie rozszerzającym paletę możliwości wypowiadanych stwierdzeń. Są to zwroty umożliwiające tworzenie nowych funkcji zdaniowych i zdań logicznych z istniejących już funkcji zdaniowych. Dwa najczęściej stosowane kwantyfikatory to:

- kwantyfikator ogólny, zwany także dużym lub uniwersalnym. Określamy w ten sposób zwroty: „dla każdego" „dla dowolnego" lub „dla wszystkich". Do zapisu symbolicznego tego kwantyfikatora najczęściej stosuje się znaki: $\bigwedge$ lub $\forall$.
- kwantyfikator szczegółowy, zwany również małym lub egzystencjalnym. Określamy w ten sposób zwroty „istnieje" lub „dla pewnego". W zapisie symbolicznym przybiera on zwykle jedną formę $\bigvee$ lub $\exists$.

Możemy także spotkać się w literaturze z zapisem $\exists!$ wyrażającym kwantyfikator: „istnieje dokładnie jeden".

Kwantyfikator zawsze występuje wraz ze zmienną, o której mówimy, że jest zmienną związaną działaniem tego kwantyfikatora. Zmienne występujące w funkcji zdaniowej, które nie są związane działaniem kwantyfikatora nazywamy zmiennymi wolnymi. Jeśli w funkcji zdaniowej nie występują kwantyfikatory, to wszystkie zmienne w niej występujące są wolne. Jeśli w funkcji zdaniowej jest tylko jedna zmienna wolna, to stosując do tej funkcji kwantyfikator wiążący tą zmienną otrzymamy zdanie logiczne. Stosując kwantyfikator do funkcji zdaniowej o większej ilości zmiennych wolnych otrzymujemy nową funkcję zdaniową, lecz o mniejszej ilości zmiennych wolnych.

Niech $\Phi(x)$ będzie formułą zdaniową, w której x jest zmienną wolną. Wówczas:

1. napis $\bigwedge\limits_{x} \Phi(x)$ możemy przeczytać na jeden z poniższych sposobów:
   - dla każdego x zachodzi $\Phi(x)$,
   - dla dowolnego x zachodzi $\Phi(x)$,
   - dla wszystkich x zachodzi $\Phi(x)$,

2. napis $\bigvee\limits_{x} \Phi(x)$ możemy przeczytać na jeden z poiższych sposobów:
   - istnieje takie x, że zachodzi $\Phi(x)$,
   - istnieje x, dla którego zachodzi $\Phi(x)$,
   - dla pewnego x zachodzi $\Phi(x)$.

Chcąc jawnie zapisać zakres zmienności zmiennej, wygodnie jest zrobić to umieszczając odpowiednią informację przy kwantyfikatorze. Zatem:

- zamiast $\bigwedge\limits_{x}(x \in X \wedge \Phi(x))$ zwykle piszemy $\bigwedge\limits_{x\in X} \Phi(x)$,
- zamiast $\bigvee\limits_{x}(x \in X \wedge \Phi(x))$ zwykle piszemy $\bigvee\limits_{x\in X} \Phi(x)$.

Przykład 1.7. Zaprezentujemy kilka zdań logicznych z użyciem kwantyfikatorów oraz odpowiadający im zapis symboliczny:

1. Dla każdej liczby naturalnej n liczba $n(n+1)$ jest podzielna przez 2:
$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} 2 \mid n(n+1).$$
2. Istnieje taka liczba całkowita x, że $x+7=-3$:
$$\bigvee_{x\in\mathbb{Z}} x+7=-3.$$
3. Kwadrat każdej liczby rzeczywistej z przedziału $(-1,1)$ jest nieujemny i mniejszy od 1:
$$\bigwedge_{x\in(-1,1)} 0 \leq x^2 < 1.$$
4. Suma kwadratów dwóch dowolnych liczb rzeczywistych jest liczbą nieujemną:
$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge_{y\in\mathbb{R}} x^2+y^2 \geq 0.$$
5. Istnieją takie liczby naturalne a, b, c, d, że $a^b = c^d$:
$$\bigvee_{a\in\mathbb{N}} \bigvee_{b\in\mathbb{N}} \bigvee_{c\in\mathbb{N}} \bigvee_{d\in\mathbb{N}} a^b = c^d.$$
6. Dla każdej liczby całkowitej x istnieje taka liczba całkowita y, że ich suma wynosi 0:
$$\bigwedge_{x\in\mathbb{Z}} \bigvee_{y\in\mathbb{Z}} x+y=0.$$

Zamiast kilku kwantyfikatorów tego samego typu stojących obok siebie można napisać jeden:

- zamiast: $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}}\bigwedge_{y\in\mathbb{R}} x^2+y^2\geq 0$, możemy napisać: $\bigwedge_{x,y\in\mathbb{R}} x^2+y^2\geq 0$,
- zamiast: $\bigvee_{a\in\mathbb{N}}\bigvee_{b\in\mathbb{N}}\bigvee_{c\in\mathbb{N}}\bigvee_{d\in\mathbb{N}} a^b=c^d$, możemy napisać: $\bigvee_{a,b,c,d\in\mathbb{N}} a^b=c^d$.

Zaprezentujemy wybrane prawa rachunku kwantyfikatorów wraz z ich nazwami:

1. prawo przestawienia kwantyfikatorów ogólnych:
$$\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y}\Phi(x,y)\iff\bigwedge_{y\in Y}\bigwedge_{x\in X}\Phi(x,y),$$
2. prawo przestawienia kwantyfikatorów szczegółowych:
$$\bigvee_{x\in X}\bigvee_{y\in Y}\Phi(x,y)\iff\bigvee_{y\in Y}\bigvee_{x\in X}\Phi(x,y),$$
3. prawa de Morgana:
$$\neg\bigwedge_{x}\Phi(x)\iff\bigvee_{x}\neg\Phi(x),\qquad\neg\bigvee_{x}\Phi(x)\iff\bigwedge_{x}\neg\Phi(x),$$
4. prawo przestawienia kwantyfikatora ogólnego ze szczegółowym:
$$\bigvee_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y}\Phi(x,y)\Longrightarrow\bigwedge_{y\in Y}\bigvee_{x\in X}\Phi(x,y).$$

Uwaga 1.8. W punkcie 4 powyżej implikacja w drugą stronę nie zachodzi. Rozważmy zdanie 6 z przykładu 1.7 (str. 11) :
$$\bigwedge_{x\in\mathbb{Z}}\bigvee_{y\in\mathbb{Z}} x+y=0.$$
Jest to zdanie prawdziwe, gdyż dla każdej liczby całkowitej x, liczba $y=-x$, dobrana indywidualnie do x, spełnia warunek $x+y=0$. Przestawiając kwantyfikatory otrzymamy zdanie:
$$\bigvee_{y\in\mathbb{Z}}\bigwedge_{x\in\mathbb{Z}} x+y=0,$$
które jest fałszywe, gdyż nie istnieje liczba całkowita y, która dodana do dowolnej liczby całkowitej x dawałaby zawsze tę samą sumę równą 0.

1.3. Elementy teorii zbiorów

Zbiór jest pojęciem pierwotnym teorii mnogości i jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje elementy, to znaczy istnieje dokładnie jeden zbiór złożony z zadanych elementów. Rozważając zbiory, konieczne jest wskazanie, czy dany element należy bądź nie należy do danego zbioru. Służą nam do tego symbole $\in$ oraz $\notin$:

- $a \in A$ czytamy „a jest elementem zbioru A” lub „a należy do zbioru A”,
- $b \notin A$ czytamy „b nie jest elementem zbioru A” lub „b nie należy do zbioru A”.

Zwyczajowo zbiory oznaczamy wielkimi literami, a ich elementy małymi literami. Jest kilka sposobów na określenie zbioru. Jednym z nich jest wypisanie wszystkich jego elementów. Na przykład zbiór oznaczony jako A złożony z liczb nieparzystych większych od 0 i mniejszych od 10 prezentuje się następująco:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

W przypadku zbiorów o dużej liczbie elementów jest to rozwiązanie niepraktyczne. Co więcej, w przypadku zbiorów o nieskończonej liczbie elementów jest to rozwiązanie niemożliwe do zastosowania. Dlatego dużo lepszym sposobem na określenie zbioru jest zbudowanie funkcji zdaniowej prawdziwej tylko i wyłącznie dla jego elementów. W ten sposób powyższy zbiór A możemy określić następująco:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k + 1 \ \wedge \ k \in \mathbb{N}_0 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ x < 10\}$$

lub

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k + 1 \ \wedge \ k \in \mathbb{N}_0 \ \wedge \ k \geq 0 \ \wedge \ k \leq 4\}.$$

Gdybyśmy chcieli zdefiniować zbiór B składający się z liczb nieparzystych z zakresu dużo większego, na przykład z zakresu od 0 do 2^{10}, to wypisanie wszystkich elementów zbioru B byłoby bardzo czasochłonne. Pewnym sposobem jest użycie wielokropka w zapisie wraz z początkowymi i końcowymi elementami zbioru B:

$$B = \{1, 3, 5, \ldots, 1021, 1023\}.$$

Jednak należy z ostrożnością stosować ten rodzaj zapisu, ponieważ prawidłowy odczyt elementów zbioru zależy w dużej mierze od domyślności czytelnika. Tymczasem, wzorując się na określeniu zbioru A, otrzymujemy:

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k + 1 \ \wedge \ k \in \mathbb{N}_0 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ x < 2^{10}\}$$

lub

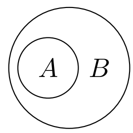
$$B = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k + 1 \ \wedge \ k \in \mathbb{N}_0 \ \wedge \ k \geq 0 \ \wedge \ k \leq 2^9 - 1\}.$$

Zauważmy, że istnieje zbiór, który nie ma żadnych elementów. Jest to zbiór pusty, oznaczany symbolem $\varnothing$, który możemy określić jako $\varnothing = \{\}$ lub $\varnothing = \{x : x \neq x\}$.

Rozważając zbiory, często konieczne jest określenie pewnej relacji pomiędzy dwoma zbiorami, o czym mówi poniższa definicja.

Definicja 1.9. Mówimy, że zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B, jeśli każdy element zbioru A jest także elementem zbioru B.

Powyższe pojęcie zapisujemy $A \subseteq B$ i czytamy „zbiór A jest podzbiorem zbioru B” lub „zbiór A zawiera się w zbiorze B” lub „zbiór B zawiera zbiór A”. Możemy je także zilustrować:



Jeżeli $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, to oczywiście $A = B$. Ponadto pojęcie podzbioru możemy także zapisać symbolicznie:

$$A \subseteq B \iff \bigwedge_{x \in A} (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Przykład 1.10. Konkretny przykład, w którym $A \subseteq B$, to zbiory A i B określone na początku podrozdziału 1.3 (str. 13).

Rozważając pojęcie podzbioru, należy wspomnieć o zbiorze potęgowym.

Definicja 1.11. Rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X nazywamy **zbiorem potęgowym** zbioru X i oznaczamy $\mathcal{P}(X)$ lub 2^X.

Pojęcie zbioru potęgowego można krótko podsumować zapisem:

$$A \in \mathcal{P}(X) \iff A \subseteq X.$$

Przykład 1.12. Dla zbioru $X = \{a, b, c\}$, zbiór potęgowy X ma postać

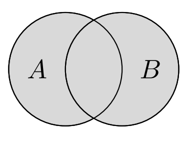
$$\mathcal{P}(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Zauważmy, że $|X| = 3$ oraz $|\mathcal{P}(X)| = 2^3 = 8$. Zachęcamy czytelnika do samodzielnego eksperymentalnego zbadania, czy w przypadku zbioru czteroelementowego jego zbiór potęgowy będzie miał $2^4 = 16$ elementów. Jaki jest wzór ogólny na liczbę elementów zbioru potęgowego? Warto porównać ten przykład z zadaniem 3.24 (str. 67).

Kolejnym krokiem jest omówienie operacji, które można wykonać na zbiorach.

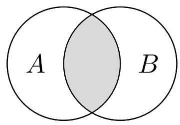
Definicja 1.13. **Suma (mnogościowa)** zbiorów A i B, oznaczana $A \cup B$, to zbiór elementów, które należą do zbioru A lub zbioru B:

$$x \in A \cup B \iff x \in A \lor x \in B.$$



Definicja 1.14. **Przekrój** (część wspólna) zbiorów A i B, oznaczana $A \cap B$, to zbiór elementów, które należą do zbioru A i zbioru B:

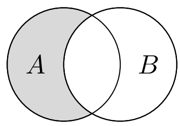
$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B,$$



Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi** jeśli $A \cap B = \varnothing$.

Definicja 1.15. **Różnica** zbiorów A i B, oznaczana $A \setminus B$, to zbiór elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B:

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B,$$



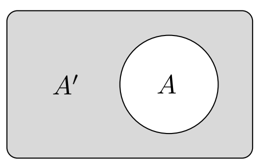
Przykład 1.16. Jeśli $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{c, d, e, f\}$, to:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad A \setminus B = \{a, b\}, \quad A \cap B = \{c, d\}, \quad B \setminus A = \{e, f\}.$$

Jeśli wszystkie rozważane zbiory są podzbiorami pewnego zbioru Ω, który to zbiór nazywamy przestrzenią lub uniwersum, możemy mówić o dopełnieniach zbiorów.

Definicja 1.17. Jeśli $A \subseteq \Omega$, to **dopełnieniem** zbioru A w Ω nazywamy zbiór $\Omega \setminus A$.

Zazwyczaj dopełnienie zbioru A oznaczamy A' i możemy je zilustrować następująco:



Ω

Przykład 1.18. Niech $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ oraz $B = \{c, d, e, f\}$. Wówczas:

$$A' = \{e, f, g, h\}, \qquad B' = \{a, b, g, h\}.$$

Zaprezentujemy wybrane prawa rachunku zbiorów wraz z ich nazwami:

1. prawo podwójnego dopełnienia:
$$(A')' = A,$$

2. prawa łączności sumy i przekroju:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

3. prawa przemienności sumy i przekroju:
$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A,$$
4. prawa rozdzielności przekroju względem sumy i sumy względem przekroju:
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$
5. prawa de Morgana:
$$(A \cap B)' = A' \cup B', \quad (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

Zauważmy, że prawa de Morgana pojawiły się trzykrotnie: w klasycznym rachunku zdań, w rachunku kwantyfikatorów oraz w rachunku zbiorów.

Ostatnim pojęciem w tym podrozdziale jest iloczyn kartezjański.

Definicja 1.19. Iloczynem kartezjańskim niepustych zbiorów A i B nazywamy zbiór:
$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów jest zatem zbiorem wszystkich takich par – ciągów dwuelementowych – w których pierwszy element pary należy do pierwszego zbioru, zaś drugi element pary jest elementem drugiego z tych zbiorów.

Bez trudu możemy pojęcie iloczynu kartezjańskiego uogólnić na dowolną skończoną liczbę zbiorów:
$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i \in \{1, \ldots, n\}\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Przykład 1.20.

1. Dla zbiorów $A = \{1, 4, 5\}$ oraz $B = \{2, 3\}$ mamy
$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3)\}.$$
2. Jeśli $A = \{3, 7\}$, $B = \{7, 9\}$, to:
$$A \times B = \{(3, 7), (3, 9), (7, 7), (7, 9)\}.$$
3. Dla $A = \{2, 6\}$, $B = \{w, z\}$, $C = \{\alpha, \beta\}$ mamy
$$A \times B \times C =$$
$$= \{(2, w, \alpha), (2, w, \beta), (2, z, \alpha), (2, z, \beta), (6, w, \alpha), (6, w, \beta), (6, z, \alpha), (6, z, \beta)\}.$$

Zachęcamy czytelnika, do zastanowienia się nad zależnością łączącą liczbę elementów iloczynu kartezjańskiego oraz liczebności zbiorów tworzących ten iloczyn. Do zagadnienia tego wrócimy w podrozdziale 3.3, str. 59.

Uwaga 1.21.

1. W przypadku określania zbiorów zawsze używamy nawiasów klamrowych. Ponadto, każdy element zbioru „występuje” w nim dokładnie jeden raz, co oznacza, że zbiór $\{a, a, b, c, c, c\}$ jest identyczny ze zbiorem $\{a, b, c\}$. Kolejność, w jakiej wymieniamy elementy zbioru, również nie ma znaczenia, więc ten sam zbiór można także zapisać jako $\{b, c, a\}$.

2. Elementy iloczynu kartezjańskiego – ciągi – zapisujemy używając nawiasów okrągłych. Należy przy tym zwrócić uwagę na kolejność wyrazów ciągu, ponieważ jeśli $a \neq b$, to $(a, b) \neq (b, a)$. W konsekwencji tego iloczyn kartezjański nie jest przemienny: jeśli $A \neq B$, to $A \times B \neq B \times A$.

1.4. Elementy teorii relacji

Badanie relacji pomiędzy obiektami, zjawiskami i pojęciami jest kwintesencją nauki. Nie inaczej jest w matematyce. Często jednakże używamy samego terminu „relacja” nie zastanawiając się głębiej nad znaczeniem tego słowa. Choćby w tym podręczniku, w akapicie tuż przed definicją 1.9 (str. 14) użyliśmy określenia „relacji pomiędzy dwoma zbiorami” (taki przypadek omówimy dokładnie w przykładzie 1.31, str. 19). Poza matematyką rozważa się różnorodne relacje, choć samo pojęcie relacji pozostaje zazwyczaj niesformalizowane. Pod tym względem matematyka różni się od innych dziedzin, gdyż musi opierać się na precyzyjnych pojęciach i formalnych definicjach.

Definicja 1.22. Niech X będzie niepustym zbiorem. Dowolny podzbiór $R \subseteq X \times X$ nazywamy **relacją dwuargumentową** (binarną) w zbiorze X.

Mówiąc inaczej, relacja w zbiorze X to podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times X$. Jeśli $(x, y) \in R$, to mówimy, że element x **jest w relacji** R z elementem y, co będziemy zapisywać xRy lub $R(x, y)$.

Przykład 1.23. Niech $X = \{1, 2, 5, 8\}$. W zbiorze X możemy określić wiele relacji na różne sposoby.

1. Możemy wymienić wszystkie elementy relacji:
$$R_1 = \{(1, 5), (8, 5), (2, 5), (8, 2), (8, 8)\}.$$
2. Możemy określić relację, podając funkcję zdaniową prawdziwą tylko i wyłącznie dla jej elementów:
$$R_2 = \{(a, b) \in X \times X : a + b \text{ jest liczbą nieparzystą}\},$$
co oczywiście jest wygodne w przypadku, gdy zbiór X ma dużo elementów. W naszym przykładzie X ma tylko 4 elementy, więc możemy pozwolić sobie na wypisanie wszystkich elementów relacji R_2:
$$R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 8), (8, 1), (2, 5), (5, 2), (5, 8), (8, 5)\}.$$
3. Możemy określić, które elementy zbioru X są ze sobą w relacji, podając po prawej stronie równoważności funkcję zdaniową prawdziwą dla elementów będących w relacji:
$$R_3(a, b) \iff a \mid b \quad \text{dla } a, b \in X.$$
Zdefiniowaną powyżej relację tworzą następujące pary:
$$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 8), (2, 2), (2, 8), (5, 5), (8, 8)\}.$$

Spośród wielu interesujących własności jakie mogą mieć relacje najważniejszymi są: zwrotność, symetria, antysymetria i przechodniość. Pozwolą nam one na określenie dwóch niezwykle ważnych typów relacji: częściowych porządków i relacji równoważności.

Definicja 1.24. Niech X będzie niepustym zbiorem. Mówimy, że relacja R w zbiorze X jest:

1. **zwrotna**, jeżeli $\bigwedge_{x \in X} xRx$,
2. **symetryczna**, jeżeli $\bigwedge_{x,y \in X} xRy \Rightarrow yRx$,
3. **przechodnia**, jeżeli $\bigwedge_{x,y,z \in X} xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$,
4. **antysymetryczna**, jeżeli $\bigwedge_{x,y \in X} xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.

Definicja 1.25. Niech X będzie niepustym zbiorem. Mówimy, że relacja R w zbiorze X jest **relacją równoważności**, jeśli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Z relacją równoważności nierozerwalnie związane jest pojęcie klasy abstrakcji, czyli zbioru tych wszystkich elementów, z którymi dany element jest w relacji.

Definicja 1.26. Niech R będzie relacją równoważności w niepustym zbiorze X oraz $x \in X$. Zbiór

$$[x]_R = \{y \in X : xRy\}$$

nazywamy **klasą abstrakcji** elementu x.

Uwaga 1.27. Zbiór $[x]_R$ jest zawsze niepusty, gdyż ze względu na zwrotność relacji R mamy $x \in [x]_R$. Nietrudno także zauważyć, że jeśli dwa elementy są ze sobą w relacji, to ich klasy abstrakcji są równe. Jeśli zaś dwa elementy nie są ze sobą w relacji, to ich klasy abstrakcji są rozłączne.

Przykład 1.28. Zbadajmy następującą relację w zbiorze $\mathbb{Z}$:

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 5 \mid (a-b)\}.$$

Relacja R jest:

1. zwrotna, ponieważ dla dowolnego $a \in \mathbb{Z}$ mamy:
$$5 \mid 0 \ \Rightarrow\ 5 \mid (a-a) \ \Rightarrow\ aRa.$$
2. symetryczna, ponieważ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$ mamy:
$$aRb \ \Rightarrow\ 5 \mid (a-b) \ \Rightarrow\ 5 \mid [-(a-b)] \ \Rightarrow\ 5 \mid (b-a) \ \Rightarrow\ bRa.$$
3. przechodnia, ponieważ dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{Z}$, jeśli $aRb \wedge bRc$, czyli $5 \mid (a-b)$ oraz $5 \mid (b-c)$, to $a-b = 5k$ oraz $b-c = 5l$ dla pewnych $k, l \in \mathbb{Z}$. Zatem $a-c = (a-b)+(b-c) = 5k+5l = 5(k+l)$, a stąd:
$$5 \mid (a-c) \ \Rightarrow\ aRc.$$

Rozważania te uzasadniają, że relacja R jest relacją równoważności.

Sprawdźmy, jak wygląda klasa abstrakcji $[0]_R$. Szukamy takich liczb całkowitych b, że $5 \mid (0-b)$. Zauważmy, że:

$$5 \mid (0-b) \;\Rightarrow\; 5 \mid (-b) \;\Rightarrow\; 5 \mid b.$$

Zatem do klasy abstrakcji $[0]_R$ należą wszystkie liczby całkowite podzielne przez 5.

Zbadajmy teraz, jakie elementy należą do klasy abstrakcji $[1]_R$. Szukamy takich liczb całkowitych b, dla których $5 \mid (1-b)$, co oznacza $1-b = 5k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Stąd $b = 1-5k = 1+5(-k)$, a zatem do klasy abstrakcji $[1]_R$ należą wszystkie liczby całkowite, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 1.

Analogiczne rozważania możemy przeprowadzić dla $[2]_R$, $[3]_R$ i $[4]_R$. Zauważmy, że $5 \in [0]_R$, $6 \in [1]_R$, $7 \in [2]_R$, itd., co prowadzi do wniosku, że każda liczba całkowita należy do jednej z 5 klas abstrakcji, które wyznaczone są przez reszty z dzielenia przez 5:

$$\begin{aligned}
[0]_R &= \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\},\\
[1]_R &= \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\},\\
[2]_R &= \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\},\\
[3]_R &= \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\},\\
[4]_R &= \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Definicja 1.29. Niech X będzie niepustym zbiorem. Mówimy, że relacja R w zbiorze X jest **relacją częściowego porządku** (jest częściowym porządkiem), jeśli jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna.

Przykład 1.30. Relacja R z przykładu 1.28 (str. 18) nie jest relacją częściowego porządku, ponieważ nie jest antysymetryczna. Można wskazać takie $a, b \in \mathbb{Z}$, że $5 \mid (a-b)$ oraz $5 \mid (b-a)$, ale $a \neq b$. Na przykład $a = 12$, $b = 27$.

Przykład 1.31. Niech Z będzie takim zbiorem, że $|Z| \geq 2$. Zbadajmy relację zawierania zbiorów, czyli relację R w zbiorze potęgowym $\mathcal{P}(Z)$ postaci:

$$R(K, L) \iff K \subseteq L \quad \text{dla } K, L \in \mathcal{P}(Z).$$

Relacja ta jest:

1. zwrotna, ponieważ dla dowolnego $K \in \mathcal{P}(Z)$ mamy
$$K \subseteq K \;\Rightarrow\; R(K, K).$$
2. przechodnia, ponieważ dla dowolnych $K, L, M \in \mathcal{P}(Z)$ mamy
$$R(K, L) \wedge R(L, M) \;\Rightarrow\; K \subseteq L \wedge L \subseteq M \;\Rightarrow\; K \subseteq M \;\Rightarrow\; R(K, M).$$
3. antysymetryczna, ponieważ dla dowolnych $K, L \in \mathcal{P}(Z)$ mamy:
$$R(K, L) \wedge R(L, K) \;\Rightarrow\; K \subseteq L \wedge L \subseteq K \;\Rightarrow\; K = L.$$

Rozważania te uzasadniają, że R jest relacją częściowego porządku. Relacja zawierania nie jest relacją równoważności, ponieważ nie jest symetryczna: na przykład przyjmując $K = \varnothing$, a za L biorąc dowolny niepusty podzbiór Z, mamy $K \subseteq L$, ale $L \nsubseteq K$.

W relacji częściowego porządku możemy mieć do czynienia z sytuacją, w której wiele elementów jest ze sobą nieporównywalnych, to znaczy zarówno x nie jest w relacji z y, jak i y nie jest w relacji z x. Jeśli zażądamy, by sytuacja taka nie miała miejsca, to znaczy, aby dowolne dwa elementy były ze sobą porównywalne, otrzymamy porządek liniowy.

Definicja 1.32. Mówimy, że relacja R w niepustym zbiorze X jest **relacją liniowego porządku**, jeśli jest relacją częściowego porządku oraz:

$$\bigwedge_{x,y\in X} xRy \vee yRx.$$

Przykład 1.33. Relacja z przykładu 1.31 (str. 19) nie jest relacją liniowego porządku. Zbiór Z ma co najmniej dwa elementy, więc weźmy takie $z_1, z_2 \in Z$, że $z_1 \neq z_2$. Oczywiście $\{z_1\}, \{z_2\} \in \mathcal{P}(Z)$, ale $\{z_1\} \nsubseteq \{z_2\} \wedge \{z_2\} \nsubseteq \{z_1\}$.

Przykład 1.34. Niech $X = \mathbb{R}$. Rozważmy następującą relację:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq y\}.$$

Czytelnik bez trudu może sprawdzić, że jest to relacja częściowego porządku. Jest to także relacja liniowego porządku, ponieważ dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in \mathbb{R}$ mamy $x \leq y$ lub $y \leq x$.

1.5. Notacja dla sum i iloczynów

Aby w zwarty sposób przedstawić sumę wielu składników, używamy symbolu sumowania, którym jest wielka litera Σ (sigma). Pod i nad tym symbolem (lub w dolnym i górnym indeksie) informujemy o zakresie sumowania:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Alternatywny zapis powyższej sumy może mieć postać:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k\in\{1,2,\ldots,n\}} a_k = \sum_{1\leq k\leq n} a_k.$$

Podobnie, aby w zwarty sposób przedstawić iloczyn wielu czynników, używamy symbolu mnożenia Π (pi):

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$

Można również powyższy iloczyn zapisać w postaci:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k\in\{1,2,\ldots,n\}} a_k = \prod_{1\leq k\leq n} a_k.$$

Podstawowe własności użyteczne przy korzystaniu z symbolu sumowania są następujące:

1. $\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k, \ \ \lambda \in \mathbb{R}$,

2. $\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k), \quad \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$,

3. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+t}^{n+t} a_{k-t}$,

4. $\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k$,

5. $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} a_{k,j} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}$,

6. $\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{j=1}^{r} b_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} (a_k b_j) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} (a_k b_j)$.

Podstawowe własności symbolu mnożenia są następujące:

1. $\prod_{k=1}^{n} a_k^{\lambda} = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{\lambda}, \ \ \lambda \in \mathbb{R}$,

2. $\prod_{k=1}^{n} a_k \cdot \prod_{k=1}^{n} b_k = \prod_{k=1}^{n} (a_k \cdot b_k), \quad \prod_{k=1}^{n} a_k \div \prod_{k=1}^{n} b_k = \prod_{k=1}^{n} (a_k \div b_k)$,

3. $\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1+t}^{n+t} a_{k-t}$,

4. $\prod_{k=1}^{n} a_k \cdot \prod_{k=n+1}^{m} a_k = \prod_{k=1}^{m} a_k$,

5. $\prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{r} a_{k,j} = \prod_{j=1}^{r} \prod_{k=1}^{n} a_{k,j}$.

Można łatwo zauważyć, że prawa sumowania od 1 do 5 istnieją w analogicznej wersji dla mnożenia. Jednak prawo sumowania nr 6 nie ma swojego odpowiednika dla mnożenia. Przyjrzyjmy się temu bliżej i zapiszmy to prawo dla $n = 2$ i $r = 2$:

$$\sum_{k=1}^{2} a_k \cdot \sum_{j=1}^{2} b_j = (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 = \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (a_k b_j).$$

Gdyby dla mnożenia analogiczne prawo zachodziło, jego strona lewa i prawa wyglądałyby następująco i byłyby odpowiednio równe:

$$L = \prod_{k=1}^{2} a_k + \prod_{j=1}^{2} b_j = (a_1 \cdot a_2) + (b_1 \cdot b_2),$$

$$P = \prod_{k=1}^{2} \prod_{j=1}^{2} (a_k + b_j) = (a_1 + b_1) \cdot (a_1 + b_2) \cdot (a_2 + b_1) \cdot (a_2 + b_2).$$

Ale równość $L = P$ jest fałszywa, ponieważ w zbiorze liczb rzeczywistych nie zachodzi rozdzielność dodawania względem mnożenia. Aby się o tym przekonać, wystarczy wziąć $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$.

Przykład 1.35. Rozwińmy poniższe wyrażenia:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$

2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{4} (b_k + 2) = (b_1 + 2) \cdot (b_2 + 2) \cdot (b_3 + 2) \cdot (b_4 + 2),$

3. $\displaystyle\sum_{k=3}^{6} 7c_k = 7c_3 + 7c_4 + 7c_5 + 7c_6,$

4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{4} d_{2k}^3 = d_2^3 \cdot d_4^3 \cdot d_6^3 \cdot d_8^3,$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \sum_{j=2}^{4} e_{k,j} = \sum_{k=1}^{3} (e_{k,2} + e_{k,3} + e_{k,4}) = e_{1,2} + e_{1,3} + e_{1,4} + e_{2,2} + e_{2,3} + e_{2,4} + e_{3,2} + e_{3,3} + e_{3,4},$

6. $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} (-1)^k f_k = f_2 - f_3 + f_4 - f_5.$

1.6. Indukcja matematyczna

Indukcja matematyczna jest metodą dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych. W podstawowej wersji polega ona na zastosowaniu poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 1.36. *Niech $T(n)$ będzie zdaniem logicznym dla $n \in \mathbb{N}$. Jeśli:*

1. *zdanie $T(1)$ jest prawdziwe,*

2. *dla każdego $k \in \mathbb{N}$, z tego, że zdanie $T(k)$ jest prawdziwe wynika, iż zdanie $T(k+1)$ także jest prawdziwe,*

to wtedy zdanie $T(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Pierwszy warunek nazywamy **bazą indukcji**. Drugi warunek nazywany **krokiem indukcyjnym** polega na tym, by korzystając z **założenia indukcyjnego** wykazać **tezę indukcyjną**.

Przykład 1.37. Korzystając z indukcji matematycznej, wykażemy, że $6 \mid (n^3 - n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

1. Baza indukcji: Dla $n = 1$ mamy $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$, a zdanie $6 \mid 0$ jest prawdziwe.
2. Krok indukcyjny. Ustalmy dowolne $k \in \mathbb{N}$.
   - Założenie indukcyjne: $6 \mid (k^3 - k)$.
   - Teza indukcyjna: $6 \mid ((k+1)^3 - (k+1))$.

   Mamy

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = \\ &= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) = \\ &= (k^3 - k) + 3k(k+1).\end{aligned}$$

   Wyrażenie $k^3 - k$ jest podzielne przez 6 z założenia indukcyjnego. Składnikami iloczynu $3k(k+1)$ są dwie kolejne liczby naturalne: n i $n+1$, więc jedna z nich jest parzysta, a zatem iloczyn również jest parzysty. Ponadto iloczyn ten jest wielokrotnością liczby 3, więc jest podzielny przez 6. Stąd $(k+1)^3 - (k+1)$ jako suma liczb podzielnych przez 6, również dzieli się przez 6, co kończy dowód tezy indukcyjnej.

Na mocy twierdzenia 1.36 (str. 22): $6|(n^3 - n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 1.38. Wykażemy, że $6 \mid (10^n + 4^n - 2)$ dla $n \in \mathbb{N}$, korzystając z indukcji matematycznej.

1. Baza indukcji: Dla $n = 1$ mamy $10^n + 4^n - 2 = 10^1 + 4^1 - 2 = 12$ oraz $6 \mid 12$, zatem stwierdzenie $6 \mid (10^1 + 4^1 - 2)$ jest prawdziwe.
2. Krok indukcyjny. Ustalmy dowolne $k \in \mathbb{N}$.
   - Założenie indukcyjne: $6 \mid (10^k + 4^k - 2)$.
   - Teza indukcyjna: $6 \mid (10^{k+1} + 4^{k+1} - 2)$.

   Mamy

$$\begin{aligned}10^{k+1} + 4^{k+1} - 2 &= 10 \cdot 10^k + 4 \cdot 4^k - 2 = \\ &= 10 \cdot (10^k + 4^k - 2) + (18 - 6 \cdot 4^k) = \\ &= 10 \cdot (10^k + 4^k - 2) + 6(3 - 4^k).\end{aligned}$$

   Pierwszy składnik powyższej sumy jest podzielny przez 6 z założenia indukcyjnego, drugi jest wielokrotnością 6, więc cała suma również dzieli się przez 6.

Na mocy twierdzenia 1.36 (str. 22): $6|(10^n + 4^n - 2)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

1.7. Funkcje całkowitoliczbowe

W matematyce dyskretnej lubimy pracować z liczbami całkowitymi, więc przydają się funkcje, które zaokrąglają liczby rzeczywiste do liczb całkowitych:

1. $\lfloor x \rfloor$ – największa liczba całkowita mniejsza lub równa x, nazywana **podłogą**, zaokrągla liczby rzeczywiste w dół,
2. $\lceil x \rceil$ – najmniejsza liczba całkowita większa lub równa x, nazywana **sufitem**, zaokrągla liczby rzeczywiste w górę.

Z podłogą jest związana również **część ułamkowa** liczby, którą definiujemy wzorem:

$$\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor.$$

Podstawowe własności funkcji podłoga i sufit są następujące:

1. $\lfloor x \rfloor = c \Longleftrightarrow c \leqslant x < c + 1$,
2. $\lfloor x \rfloor = c \Longleftrightarrow x - 1 < c \leqslant x$,
3. $\lceil x \rceil = c \Longleftrightarrow c - 1 < x \leqslant c$,
4. $\lceil x \rceil = c \Longleftrightarrow x \leqslant c < x + 1$.

Jest również wiele dodatkowych własności, które warto znać:

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1$,
2. $0 \leq \langle x \rangle < 1$,
3. $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$,
4. $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1 \Longleftrightarrow x \notin \mathbb{Z}$,
5. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$,
6. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$,
7. $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k \Longleftrightarrow k \in \mathbb{Z}$,
8. $\lceil x + k \rceil = \lceil x \rceil + k \Longleftrightarrow k \in \mathbb{Z}$,
9. $x < k \Longleftrightarrow \lfloor x \rfloor < k,\ k \in \mathbb{Z}$,
10. $k < x \Longleftrightarrow k < \lceil x \rceil,\ k \in \mathbb{Z}$,
11. $x \leqslant k \Longleftrightarrow \lceil x \rceil \leqslant k,\ k \in \mathbb{Z}$,
12. $k \leqslant x \Longleftrightarrow k \leqslant \lfloor x \rfloor,\ k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 1.39. Obliczymy wartość wyrażenia:

$$\big\lfloor \lceil 5{,}1 \rceil - \langle 7{,}7 \rangle + \lceil -8{,}3 \rceil - \langle -9{,}6 \rangle \cdot \lfloor -2{,}5 \rfloor \big\rfloor = \big\lfloor 6 - 0{,}7 - 8 - 0{,}4 \cdot (-3) \big\rfloor = \lfloor -1{,}5 \rfloor = -2.$$

Przykład 1.40. Policzmy, ile jest liczb całkowitych w przedziale $[-55, 45]$ podzielnych przez 6. Dzielimy przedział $[-55, 45]$ na części: $[-55, -1]$, $(-1, 1)$, $[1, 45]$. Wprowadźmy robocze oznaczenie $d(A)$ na ilość liczb podzielnych przez 6 w zbiorze A. Zauważmy, że $d([1, x]) = d([-x, -1]) = \lfloor x/6 \rfloor$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} d([-55, 45]) &= d([-55, -1]) + d((-1, 1)) + d([1, 45]) = d([1, 55]) + 1 + d([1, 45]) = \\ &= \left\lfloor \frac{55}{6} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{45}{6} \right\rfloor = 9 + 1 + 7 = 17. \end{aligned}$$

Sprawdźmy otrzymany wynik wypisując wszystkie te liczby:

$$-54, -48, -42, -36, -30, -24, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42.$$

1.8. Zadania

Zadanie 1.1. Wskaż, które z następujących zdań są zdaniami logicznymi:

a) $2 + 2 = 10$.

b) Nie jedz tyle hamburgerów!

c) Istnieje taka wartość x, że $x^2 - 2x + 9 = 0$.

d) Kto jest prezydentem Francji?

e) $|5| = -5$.

f) Liczba π jest wymierna.

g) Uważaj!

h) Ile jest kontynentów na Ziemi?

i) Wszystkie rekiny są roślinożerne.

j) Kraków był stolicą Polski.

k) Każdy czworokąt jest wypukły.

l) Jaki jest najwyższy szczyt w Alpach?

m) $3 > 7$.

n) Na dnie Pacyfiku żyją wirusy.

Zadanie 1.2. Wyznacz wartość logiczną poniższych formuł, przyjmując następujące wartości zmiennych zdaniowych $p = 1, q = 0, r = 1$:

a) $[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$,

b) $[(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (\neg \wedge p)$,

c) $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg r] \Leftrightarrow \neg p$,

d) $[(p \vee q) \Rightarrow (p \vee \neg q)] \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$,

e) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$,

f) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (r \vee q)$.

Zadanie 1.3. Określ wartości logiczne następujących zdań:

a) Nieprawda, że $3 + 4 = 9$.

b) Jeżeli $2 + 2 = 4$, to $2 + 4 = 8$.

c) Jeżeli $2 + 2 = 5$, to $2 + 4 = 6$.

d) Jeżeli $2 + 2 = 4$, to $2 + 4 = 6$.

e) Jeżeli $2 + 2 = 5$, to $2 + 4 = 8$.

f) Jeśli Ziemia ma kształt stożka, to Bolesław Chrobry był pierwszym królem Polski.

g) Jeśli Washington był pierwszym prezydentem Stanów Zjednoczonych, to $3 + 3 = 8$.

h) W Polsce uprawia się kawę lub kakao.

i) $(1 + 2)^2 \neq (-1 - 2)^2 \ \vee \ -0.5 > -\frac{1}{3}$.

j) $(15 \mid 45 \ \vee \ 5 \mid 45) \iff [(2 < -1) \implies (4^2 = (-4)^2)]$.

k) $[(2 + 3)^2 = 25 \iff (2 + 3)^2 > 1] \ \wedge \ [(2 \cdot 2 = 4) \iff (3 \cdot 5 = 10)]$.

l) Słońce jest gwiazdą wtedy i tylko wtedy, gdy Ziemia ma trzy księżyce.

Zadanie 1.4. Sprawdź, czy podane formuły są tautologiami:

a) $[(p \Leftrightarrow q) \vee (\neg p \wedge q)] \Rightarrow (p \vee q)$,

b) $[(p \vee \neg q) \Rightarrow \neg q] \wedge (p \Leftrightarrow q)$,

c) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$,

d) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)]$,

e) $(p \wedge q) \vee [(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$,

f) $(((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (p \vee q) \Rightarrow \neg r) \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$.

Zadanie 1.5. Utwórz zaprzeczenia następujących zdań, korzystając z odpowiednich praw (str. 8):

a) Marek spędził wakacje w Grecji lub Hiszpanii.

b) Beata uczy się języka francuskiego i angielskiego.

c) Jeśli Adam jest studentem, to nie pracuje.

d) 7 jest liczbą naturalną lub pierwszą.

e) 2 jest liczbą parzystę lub 5 jest dzielnikiem 8.

f) 3 nie jest liczbą złożoną i 9 nie jest liczbą parzystę.

g) Pingwiny nie latają i słoń jest większy od kozy.

h) Jeśli śnieg jest biały, to trawa jest różowa.

Zadanie 1.6. Określ wartości logiczne następujących zdań:

a) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} |x| + 1 > 0$,

b) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

c) $\bigvee_{x\in\mathbb{R}} x^2 - x + 1 = 0$,

d) $\bigwedge_{a,b\in\mathbb{R}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (ab)^n = a^n b^n$,

e) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigvee_{y\in\mathbb{R}} x + y > 0$,

f) $\bigvee_{y\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x + y > 0$,

g) $\bigvee_{x\in\mathbb{Z}} x > 5 \vee x < 3$,

h) $\bigvee_{x\in\mathbb{Z}} x > 5 \wedge x < 3$,

i) $\bigvee_{x\in\mathbb{N}} x > 7 \wedge x < 8$.

Zadanie 1.7. Oceń wartość logiczną podanych zdań i zapisz je, używając kwantyfikatorów i symboli matematycznych:

a) Każda liczba naturalna jest nieujemna.

b) Istnieje taka liczba rzeczywista x, że $x + 5 = 12$.

c) Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej powiększony o 1 jest liczbą dodatnią.

d) Istnieje liczba całkowita, której trzecia potęga jest liczbą ujemną.

e) Dla dowolnej liczby rzeczywistej istnieje liczba całkowita od niej mniejsza.

f) Istnieje liczba rzeczywista, która jest nie większa od dowolnej liczby naturalnej.

g) Istnieje liczba całkowita, która jest nie większa od dowolnej liczby rzeczywistej.

h) Dla dowolnej liczby rzeczywistej x istnieje taka liczba rzeczywista y, że $x - y$ jest ujemna.

Zadanie 1.8. Utwórz zaprzeczenia następujących zdań, korzystając z odpowiednich praw (str. 12) :

a) Wszyscy studenci zdali egzamin z matematyki dyskretnej.

b) Istnieje człowiek, który zna swoją przyszłość.

c) Każda liczba rzeczywista jest dodatnia lub każda liczba rzeczywista jest ujemna.

d) Istnieje liczba naturalna, która jest nieparzysta i podzielna przez 10.

e) Wszystkie prostokąty są kwadratami.

f) Istnieje liczba naturalna podzielna przez 3 i każda liczba całkowita jest nieujemna.

Zadanie 1.9. Wypisz elementy poniższych zbiorów:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -4 < x \leq 3\}$,

b) $B = \{x \in \mathbb{N} : (x+3)(x-2) = 0\}$,

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 3\}$,

d) $D = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge x < 8\}$,

e) $E = \{x \in \mathbb{N} : x \mid 12\}$,

f) $F = \{x \in \mathbb{Z} : 4 \mid x \ \wedge \ -7 < x \leq 4\}$.

Zadanie 1.10. Podaj wszystkie elementy zbioru potęgowego $\mathcal{P}(X)$, gdy:

a) $X = \{k, l\}$,

b) $X = \{\{a, b\}, 3\}$,

c) $X = \{\text{kot, koń, okoń}\}$,

d) $X = \{a, \beta, C, \delta\}$,

e) $X = \{\{x, 4\}, \{y, 7\}\}$,

f) $X = \{\{K, \{L, M\}\}, \alpha\}$.

Zadanie 1.11. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$, jeśli:

a) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$,

b) $A = \{-2, -1, 0, 1, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 8\}$,

c) $A = \{5, 7, 9, 11\}$, $B = \{7, 9\}$,

d) $A = \{-1, -2, -3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$,

e) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 3\}$.

Zadanie 1.12. Niech zbiór $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ będzie przestrzenią. Wyznacz zbiory A', B', $A' \cup B'$, $(A \cup B)'$, $A' \cap B'$, $(A \cap B)'$, jeśli:

a) $A = \{x \in \Omega : x \text{ jest liczbą pierwszą}\}$, $B = \{x \in \Omega : x = 2k \ \wedge \ k \in \mathbb{N}\}$,

b) $A = \{x \in \Omega : x \mid 8\}$, $B = \{x \in \Omega : 2 \mid x\}$,

c) $A = \{x \in \Omega : 3 \mid x\}$, $B = \{x \in \Omega : x = 2k + 1 \ \wedge \ k \in \mathbb{N}_0\}$.

Zadanie 1.13. Dane są zbiory:

$$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{3, 4\},\ C = \{5\},\ D = \{w, z\},\ E = \{w, x, y, z\}.$$

Wyznacz iloczyny kartezjańskie:

a) $A \times B$, c) $B \times B$, e) $B \times C \times B$, g) $E \times D$,

b) $B \times A$, d) $A \times B \times C$, f) $D \times B$, h) $C \times E$.

Zadanie 1.14. Zweryfikuj, czy podana relacja jest relacją zwrotną, symetryczną, antysymetryczną lub przechodnią:

a) $X = \mathbb{N},\ R_\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a \mid b\}$,

b) $X = \mathbb{Z},\ R_\beta = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \mid b\}$,

c) $X = \mathbb{N},\ R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x < y\}$,

d) $X = \mathbb{N},\ R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq y\}$,

e) $X = \mathbb{R},\ R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq y\}$,

f) $X = \mathbb{N},\ R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq y^2\}$,

g) $X = \mathbb{R},\ R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq y^2\}$,

h) $X = \mathbb{Z},\ \bar{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 3 \mid (a - b)\}$,

i) $X = \mathbb{Z},\ \tilde{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 7 \mid (a - b)\}$,

j) $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \hat{R} = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) : x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2\}$,

k) $X = \mathcal{P}(\{a, b, c\}),\ T = \{(K, L) \in \mathcal{P}(\{a, b, c\}) \times \mathcal{P}(\{a, b, c\}) : K \subseteq L\}$,

l) X – zbiór punktów na płaszczyźnie Oxy,
$H = \{(a, b) \in X \times X :$ odległość punktu a od początku układu jest równa odległości punktu b od początku układu$\}$,

m) X – zbiór wszystkich państw,
$G = \{(x, y) \in X \times X :$ państwo x ma granicę lądową z państwem $y\}$,

n) X – zbiór słów w słowniku języka polskiego,
$S_1 = \{(x, y) \in X \times X :$ słowo x ma co najmniej jedną wspólną literę ze słowem $y\}$,

o) X – zbiór słów w słowniku języka polskiego,
$S_2 = \{(x, y) \in X \times X :$ słowo x ma tyle samo liter co słowo $y\}$,

p) X – zbiór słów w słowniku języka polskiego,
$S_3 = \{(x, y) \in X \times X :$ słowo x rozpoczyna się na tę samą literę co słowo $y\}$,

q) X – zbiór słów w słowniku języka polskiego,
$S_4 = \{(x, y) \in X \times X :$ słowo x zajmuje wcześniejszą lub tę samą pozycję w porządku leksykograficznym co słowo $y\}$,

r) X – zbiór prostych na płaszczyźnie,
$K_1 = \{(x, y) \in X \times X :$ prosta x jest równoległa do prostej $y\}$,

s) X – zbiór prostych na płaszczyźnie,
$K_2 = \{(a, b) \in X \times X : \text{prosta } a \text{ jest prostopadła do prostej } b\}$,

t) X – zbiór obywateli Polski żyjących w dniu 1 stycznia 2024 r. o godz. 00:01,
$P_1 = \{(k, l) \in X \times X : \text{osoba } k \text{ jest przodkiem osoby } l\}$,

u) X – zbiór obywateli Polski żyjących w dniu 1 stycznia 2024 r. o godz. 00:01,
$P_2 = \{(k, l) \in X \times X : \text{osoba } k \text{ jest rodzicem osoby } l\}$,

v) X – zbiór obywateli Polski żyjących w dniu 1 stycznia 2024 r. o godz. 00:01,
$P_3 = \{(k, l) \in X \times X : \text{osoba } k \text{ jest dzieckiem osoby } l\}$,

w) X – zbiór obywateli Polski żyjących w dniu 1 stycznia 2024 r. o godz. 00:01,
$P_4 = \{(k, l) \in X \times X : \text{osoba } k \text{ jest mężem lub żoną osoby } l\}$,

x) X – zbiór obywateli Polski żyjących w dniu 1 stycznia 2024 r. o godz. 00:01,
$P_5 = \{(k, l) \in X \times X : \text{osoba } k \text{ ma co najmniej jednego wspólnego rodzica z osobą } l\}$,

y) X – zbiór obywateli Polski żyjących w dniu 1 stycznia 2024 r. o godz. 00:01,
$P_6 = \{(k, l) \in X \times X : \text{osoba } k \text{ ma tych samych rodziców co osoba } l\}$,

z) X – zbiór obywateli Polski żyjących w dniu 1 stycznia 2024 r. o godz. 00:01,
$L = \{(k, l) \in X \times X : \text{osoba } k \text{ urodziła się w tym samym miesiącu co osoba } l\}$.

Zadanie 1.15. Wskaż, które relacje z zadania 1.14 są relacjami:

a) równoważności; wyznacz dla nich klasy abstrakcji,

b) częściowego porządku,

c) liniowego porządku.

Zadanie 1.16. Wypisz wszystkie elementy poniższych sum i iloczynów:

a) $\sum_{i=1}^{5} a_i^3$,

b) $\prod_{j=3}^{7} 4b_j$,

c) $\sum_{k=2}^{6} c_{k+1}$,

d) $\sum_{i=1}^{4} (-1)^i d_i e_i$,

e) $\sum_{j=2}^{5} \sum_{k=3}^{6} f_{j,k}$,

f) $\prod_{0 \le m \le 4} g_{m^2}$,

g) $\sum_{1 \le i,j \le 4} a_i b_j$,

h) $\sum_{1 \le i < j \le 4} a_i b_j$,

i) $\sum_{1 \le i \le j \le 4} a_i b_j$,

j) $\prod_{k=2}^{4} (c_k + d_k)$,

k) $\prod_{\substack{i,j \ge 1 \\ i+j=5}} e_{i,j}$,

l) $\sum_{5 \le m < 8} (f_m + 4)$.

Zadanie 1.17. Zapisz przy pomocy notacji sumowej lub iloczynowej poniższe wyrażenia:

a) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 17$,

b) $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 512$,

c) $18 + 21 + 24 + 27 + \cdots + 45$,

d) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{6561}$,

e) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 26$,

f) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{25} \cdots \frac{1}{85}$,

g) $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \cdots - 17$,

h) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots + 17$.

Zadanie 1.18. Wykaż, że dla każdego n naturalnego:

a) $3 \mid (n^3 + 2n)$,
b) $3 \mid (n^3 - 3n^2 + 2n - 3)$,
c) $6 \mid (n^3 - n)$,
d) $6 \mid (n^3 + 12n)$,
e) $6 \mid (n^3 + 3n^2 + 2n)$,
f) $9 \mid (n^3+(n+1)^3+(n+2)^3)$.

Zadanie 1.19. Wykaż, że dla każdego n naturalnego:

a) $4 \mid (5^{5n+3} + 3)$,
b) $7 \mid (2^{n+2} + 3^{2n+1})$,
c) $8 \mid (5^{2n+1} + 3)$,
d) $10 \mid (3^{4n+2} + 1)$,
e) $11 \mid (2^{6n+1} + 3^{2n+2})$,
f) $14 \mid (3^{4n+2} + 5^{2n+1})$.

Zadanie 1.20. Oblicz:

a) $\lceil 2\pi \rceil + \left\lceil \sqrt{150} \right\rceil$,

b) $\dfrac{\left\lceil \lceil -8,6 \rceil \cdot \lfloor 2,44 \rfloor + \langle -5,54 \rangle \right\rceil}{\left\lfloor \sqrt{300} \right\rfloor}$,

c) $\left\lceil \lceil 3,75 \rceil \cdot \langle 4,53 \rangle \right\rceil + \lceil 11,6 \rceil - 3 \cdot \lfloor -5,9 \rfloor$,

d) $\dfrac{\left\lceil \lceil 4,75 \rceil + \lfloor -3,41 \rfloor - \langle 2,43 \rangle \right\rceil}{\left\lfloor \lfloor \pi \rfloor - \lceil 2^4 - 3,5 \rceil + \langle -7,33 \rangle \right\rfloor}$.

Zadanie 1.21. Na przykładzie dowolnej liczby rzeczywistej x, która nie jest całkowita, sprawdź podstawowe i uzupełniające własności funkcji całkowitoliczbowych (str. 24).

Zadanie 1.22.

a) Ile jest liczb w przedziale $[1, 30]$ podzielnych przez 7?

b) Ile jest liczb w przedziale $[0, 42]$ podzielnych przez 9?

c) Ile jest liczb w przedziale $[-33, -1]$ podzielnych przez 5?

d) Ile jest liczb w przedziale $[-25, 11]$ podzielnych przez 6?

e) Ile jest liczb w przedziale $[17, 53]$ podzielnych przez 8?

f) Ile jest liczb w przedziale $[1, 7564]$ podzielnych przez 7?

g) Ile jest liczb w przedziale $[0, 5437]$ podzielnych przez 11?

h) Ile jest liczb w przedziale $[-3563, -1]$ podzielnych przez 9?

i) Ile jest liczb w przedziale $[-2565, 3451]$ podzielnych przez 6?

j) Ile jest liczb w przedziale $[1787, 5663]$ podzielnych przez 7?

1.9. Odpowiedzi

Odpowiedź 1.1. Zdania logiczne: a, c, e, f, i, j, k, m, n.

Odpowiedź 1.2.

a) 1,
b) 1,
c) 1,
d) 0,
e) 1,
f) 1.

Odpowiedź 1.3.

a) 1, c) 1, e) 1, g) 0, i) 0, k) 0,

b) 0, d) 1, f) 1, h) 0, j) 1, l) 0.

Odpowiedź 1.4.

a) Nie, wartość 0 dla $(p, q) = (0, 0)$.

b) Nie, wartość 0 dla $(p, q) \in \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$.

c) Tak.

d) Nie, wartość 0 dla $(p, q, r) \in \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$.

e) Nie, wartość 0 dla $(p, q) = (1, 0)$.

f) Nie, wartość 0 dla $(p, q, r) \in \{(0, 0, 0), 0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

Odpowiedź 1.5.

a) Marek nie spędził wakacji w Grecji i nie spędził wakacji w Hiszpanii.

b) Beata nie uczy się języka francuskiego lub nie uczy się angielskiego.

c) Adam jest studentem i pracuje.

d) 7 nie jest liczbą naturalną i nie jest liczbą pierwszą.

e) 2 nie jest liczbą parzystą i 5 nie jest dzielnikiem 8.

f) 3 jest liczbą złożoną lub 9 jest liczbą parzystą.

g) Pingwiny latają lub słoń nie jest większy od kozy.

h) Śnieg jest biały i trawa nie jest różowa.

Odpowiedź 1.6.

a) 1, d) 1, g) 1,

b) 1, e) 1, h) 0,

c) 0, f) 0, i) 0.

Odpowiedź 1.7.

a) 1, $\bigwedge_{x\in\mathbb{N}} x \geq 0.$

b) 1, $\bigvee_{x\in\mathbb{R}} x + 5 = 12.$

c) 1, $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x^2 + 1 > 0.$

d) 1, $\bigvee_{x\in\mathbb{Z}} x^3 < 0.$

e) 1, $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigvee_{y\in\mathbb{Z}} y < x.$

f) 1, $\bigvee_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge_{y\in\mathbb{N}} x \leq y.$

g) 0, $\bigvee_{x\in\mathbb{Z}} \bigwedge_{y\in\mathbb{R}} x \leq y.$

h) 1, $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigvee_{y\in\mathbb{R}} x - y < 0.$

Odpowiedź 1.8.

a) Istnieje student, który nie zdał egzaminu z matematyki dyskretnej.

b) Żaden człowiek nie zna swojej przyszłości.

c) Istnieje liczba rzeczywista, która nie jest dodatnia i istnieje liczba rzeczywista, która nie jest ujemna.

d) Każda liczba naturalna jest parzysta lub niepodzielna przez 10.

e) Istnieje prostokąt, który nie jest kwadratem.

f) Każda liczba naturalna jest niepodzielna przez 3 lub istnieje liczba całkowita ujemna.

Odpowiedź 1.9.

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

b) $B = \{2\}$,

c) $C = \{-3, 3\}$,

d) $D = \{2, 4, 6\}$,

e) $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,

f) $F = \{-4, 0, 4\}$.

Odpowiedź 1.10.

a) $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing,\ \{k\},\ \{l\},\ \{k, l\}\}$,

b) $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing,\ \{\{a, b\}\},\ \{3\},\ \{\{a, b\}, 3\}\}$,

c) $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing,\ \{\text{kot}\},\ \{\text{koń}\},\ \{\text{okoń}\},\ \{\text{kot, koń}\},\ \{\text{kot, okoń}\},$ $\{\text{koń, okoń}\},\ \{\text{kot, koń, okoń}\}\}$,

d) $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing,\ \{a\},\ \{\beta\},\ \{C\},\ \{\delta\},\ \{a, \beta\},\ \{a, C\},\ \{a, \delta\},\ \{\beta, C\},\ \{\beta, \delta\},\ \{C, \delta\},$ $\{a, \beta, C\},\ \{a, \beta, \delta\},\ \{a, C, \delta\},\ \{\beta, C, \delta\},\ \{a, \beta, C, \delta\}\}$,

e) $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing,\ \{\{x, 4\}\},\ \{\{y, 7\}\},\ \{\{x, 4\}, \{y, 7\}\}\}$,

f) $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing,\ \{\{K, \{L, M\}\}\},\ \{\alpha\},\ \{\{K, \{L, M\}\}, \alpha\}\}$.

Odpowiedź 1.11.

a) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{c\}$, $A \setminus B = \{a, b\}$, $B \setminus A = \{d\}$.

b) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 5, 3, 8\}$, $A \cap B = \{1, 5\}$, $A \setminus B = \{-2, -1, 0, \}$, $B \setminus A = \{3, 8\}$.

c) $A \cup B = \{5, 7, 9, 11\}$, $A \cap B = \{7, 9\}$, $A \setminus B = \{5, 11\}$, $B \setminus A = \varnothing$.

d) $A \cup B = \{-1, -2, -3, 1, 2, 3\}$, $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$.

e) $A \cup B = \mathbb{N}$, $A \cap B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 9\}$.

Odpowiedź 1.12.

a) $A = \{2, 3, 5, 7\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\},$
$A' = \{1, 4, 6, 8, 9\}, \quad B' = \{1, 3, 5, 7, 9\},$
$A' \cup B' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad (A \cup B)' = \{1, 9\},$
$A' \cap B' = \{1, 9\}, \quad (A \cap B)' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$

b) $A = \{1, 2, 4, 8\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\},$
$A' = \{3, 5, 6, 7, 9\}, \quad B' = \{1, 3, 5, 7, 9\},$
$A' \cup B' = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}, \quad (A \cup B)' = \{3, 5, 7, 9\},$
$A' \cap B' = \{3, 5, 7, 9\}, \quad (A \cap B)' = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}.$

c) $A = \{3, 6, 9\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\},$
$A' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, \quad B' = \{2, 4, 6, 8\},$
$A' \cup B' = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad (A \cup B)' = \{2, 4, 8\},$
$A' \cap B' = \{2, 4, 8\}, \quad (A \cap B)' = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}.$

Odpowiedź 1.13.

a) $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\},$

b) $B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\},$

c) $B \times B = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\},$

d) $A \times B \times C = \{(1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 3, 5), (3, 4, 5)\},$

e) $B \times C \times B = \{(3, 5, 3), (3, 5, 4), (4, 5, 3), (4, 5, 4)\},$

f) $D \times B = \{(w, 3), (w, 4), (z, 3), (z, 4)\},$

g) $E \times D = \{(w, w), (w, z), (x, w), (x, z), (y, w), (y, z), (z, w), (z, z)\},$

h) $C \times E = \{(5, w), (5, x), (5, y), (5, z)\}.$

Odpowiedź 1.14.

	zwr.?	sym.?	przech.?	antysym.?	równ.?	cz. porz.?	l. porz.?
a	T	N	T	T		✓	
b	T	N	T	N			
c	N	N	T	T*			
d	T	N	T	T		✓	✓
e	T	N	T	T		✓	✓
f	T	N	N	N			
g	N	N	N	N			
h	T	T	T	N	✓		
i	T	T	T	N	✓		
j	T	N	T	T		✓	
k	T	N	T	T		✓	
l	T	T	T	N	✓		
m	T	T	N	N			
n	T	T	N	N			
o	T	T	T	N	✓		
p	T	T	T	N	✓		
q	T	N	T	T		✓	✓
r	T	T	T	N	✓		
s	N	T	N	N			
t	N	N	T	T*			
u	N	N	N	T*			
v	N	N	N	T*			
w	N	T	N	N			
x	N	T	N	N			
y	T	T	T	N	✓		
z	T	T	T	N	✓		

* – poprzednik implikacji jest pusto spełniony, więc cała implikacja jest prawdziwa.

Odpowiedź 1.15.

a) Relacje równoważności: h, i, l, o, p, r, y, z.

Klasy abstrakcji dla h:

- $[0]_{\bar{R}} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$,
- $[1]_{\bar{R}} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$,
- $[2]_{\bar{R}} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$.

Klasy abstrakcji dla i:

- $[0]_{\tilde{R}} = \{\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots\}$,
- $[1]_{\tilde{R}} = \{\dots, -13, -6, 1, 8, 15, \dots\}$,
- $[2]_{\tilde{R}} = \{\dots, -12, -5, 2, 9, 16, \dots\}$,
- $[3]_{\tilde{R}} = \{\dots, -11, -4, 3, 10, 17, \dots\}$,
- $[4]_{\tilde{R}} = \{\dots, -10, -3, 4, 11, 18, \dots\}$,
- $[5]_{\tilde{R}} = \{\dots, -9, -2, 5, 12, 19, \dots\}$,
- $[6]_{\tilde{R}} = \{\dots, -8, -1, 6, 13, 20, \dots\}$.

Klasy abstrakcji dla l: jedna klasa abstrakcji to zbiór punktów na okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$.

Klasy abstrakcji dla o: jedna klasa abstrakcji to zbiór słów mających tyle samo liter.

Klasy abstrakcji dla p: jedna klasa abstrakcji to zbiór słów rozpoczynających się na tę samą literę.

Klasy abstrakcji dla r: jedna klasa abstrakcji to zbiór prostych mających ten sam kierunek.

Klasy abstrakcji dla y: jedna klasa abstrakcji to zbiór osób mających tych samych rodziców.

Klasy abstrakcji dla z: jedna klasa abstrakcji to zbiór osób urodzonych w tym samym miesiącu.

b) relacje częściowego porządku: a, d, e, j, k, q.

c) relacje liniowego porządku: d, e, q.

Odpowiedź 1.16.

a) $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3$,

b) $4b_3 \cdot 4b_4 \cdot 4b_5 \cdot 4b_6 \cdot 4b_7$,

c) $c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7$,

d) $-d_1e_1 + d_2e_2 - d_3e_3 + d_4e_4$,

e) $f_{2,3}+f_{2,4}+f_{2,5}+f_{2,6}+f_{3,3}+f_{3,4}+f_{3,5}+f_{3,6}+f_{4,3}+f_{4,4}+f_{4,5}+f_{4,6}+f_{5,3}+f_{5,4}+f_{5,5}+f_{5,6}$,

f) $g_0 \cdot g_1 \cdot g_4 \cdot g_9 \cdot g_{16}$,

g) $a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_1b_4 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_2b_4 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_3b_4 + a_4b_1 + a_4b_2 + a_4b_3 + a_4b_4$,

h) $a_1b_2 + a_1b_3 + a_1b_4 + a_2b_3 + a_2b_4 + a_3b_4$,

i) $a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_1b_4 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_2b_4 + a_3b_3 + a_3b_4 + a_4b_4$,

j) $(c_2 + d_2) \cdot (c_3 + d_3) \cdot (c_4 + d_4)$,

k) $e_{1,4} \cdot e_{2,3} \cdot e_{3,2} \cdot e_{4,1}$,

l) $(f_5 + 4) + (f_6 + 4) + (f_7 + 4)$.

Odpowiedź 1.17.

a) $\sum\limits_{k=1}^{17} k$,

c) $\sum\limits_{j=6}^{15} 3j$,

e) $\prod\limits_{i=1}^{13} 2i$,

g) $\sum\limits_{k=1}^{17} (-1)^k k$,

b) $\sum\limits_{i=0}^{9} 2^i$,

d) $\sum\limits_{k=0}^{8} \frac{1}{3^k}$,

f) $\prod\limits_{j=0}^{8} \frac{1}{5(2j+1)}$,

h) $\sum\limits_{k=1}^{17} (-1)^{k+1} k$.

Odpowiedź 1.18. —

Odpowiedź 1.19. —

Odpowiedź 1.20.

a) 20,

b) $-\dfrac{15}{17}$,

c) 33,

d) $-\dfrac{1}{10}$.

Odpowiedź 1.21. —

Odpowiedź 1.22.

a) $\left\lfloor \dfrac{30}{7} \right\rfloor = 4$,

b) $\left\lfloor \dfrac{42}{9} \right\rfloor + 1 = 5$,

c) $\left\lfloor \dfrac{33}{5} \right\rfloor = 6$,

d) $\left\lfloor \dfrac{25}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{11}{6} \right\rfloor + 1 = 6$,

e) $\left\lfloor \dfrac{53}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{16}{8} \right\rfloor = 4$,

f) $\left\lfloor \dfrac{7564}{7} \right\rfloor = 1080$,

g) $\left\lfloor \dfrac{5437}{11} \right\rfloor + 1 = 495$,

h) $\left\lfloor \dfrac{3563}{9} \right\rfloor = 395$,

i) $\left\lfloor \dfrac{2565}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{3451}{6} \right\rfloor + 1 = 1003$,

j) $\left\lfloor \dfrac{5663}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{1786}{7} \right\rfloor = 554$.

Rozdział 2

Elementy teorii liczb

W tym rozdziale przedstawimy wybrane elementy teorii liczb takie jak podzielność liczb, liczby pierwsze i złożone, największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność, algorytm Euklidesa oraz liczby względnie pierwsze. Pojęcia te pojawiają się już na zajęciach z matematyki i informatyki w szkole podstawowej i średniej, jednakże jest bardzo ważne, aby te wiadomości uporządkować i uzupełnić.

2.1. Podzielność liczb

Rozpoczniemy od powtórzenia podstawowego określenia związanego z podzielnością. Mówimy, że liczba całkowita m **dzieli** liczbę całkowitą a, lub inaczej **jest dzielnikiem** liczby całkowitej a, jeżeli istnieje taka liczba całkowita n, że $mn = a$. Fakt ten zapisujemy $m \mid a$. Jeżeli liczba m nie dzieli liczby a, to piszemy $m \nmid a$. Zbiór wszystkich dzielników całkowitych liczby a oznaczmy $\mathcal{D}(a)$. Jeżeli liczba a jest naturalna, to w zbiorze jej dzielników wyróżniamy **dzielniki właściwe**. Są to te dzielniki, które są liczbami naturalnymi różnymi od a. Zwyczajowo nie mówimy o dzielnikach właściwych liczb ujemnych.

Przykład 2.1. Niech $a = 12$ oraz $m = 3$. Wtedy $3 \mid 12$, a zbiór wszystkich dzielników całkowitych liczby 12 jest następujący:

$$\mathcal{D}(12) = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

Oczywiście $\mathcal{D}(12) = \mathcal{D}(-12)$. Dzielniki właściwe liczby 12 to 1, 2, 3, 4 i 6.

Przypomnijmy, że relacja podzielności w zbiorze liczb naturalnych:

$$R_{\mathbb{N}} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a \mid b\}$$

jest relacją częściowego porządku (zadanie 1.14a, str. 28). Jednakże analogiczna relacja rozważana w zbiorze liczb całkowitych:

$$R_{\mathbb{Z}} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \mid b\}$$

nie jest antysymetryczna (zadanie 1.14b, str. 28), zatem nie jest już relacją częściowego porządku.

Najważniejsze własności podzielności są wymienione poniżej. Niech $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Wtedy:

1. jeżeli $m \mid a$ oraz $m \mid b$, to $m \mid (a+b)$ oraz $m \mid (a-b)$,
2. jeżeli $m \mid a$ oraz $a \mid b$, to $m \mid b$,
3. jeżeli $m \mid a$, to $m \mid ab$,
4. jeżeli $m \mid a$ oraz $a \neq 0$, to $|m| \leq |a|$,
5. jeżeli $m \mid a$ oraz $a \mid m$, to $m = a$ lub $m = -a$,
6. $m \mid 0$, w szczególności $0 \mid 0$,
7. dla $a \neq 0$ nieprawda, że $0 \mid a$,
8. $1 \mid a, \quad -1 \mid a, \quad a \mid a, \quad -a \mid a$.

W następnym kroku zaprezentujemy twierdzenie, które stanowi podstawę algorytmu Euklidesa.

Twierdzenie 2.2. *Jeśli $a, b \in \mathbb{Z}$ oraz $b \neq 0$, to istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych q, r spełniająca warunki:*

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|. \tag{2.1}$$

Ponadto $b \mid a$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $r = 0$.

Liczbę r z tezy powyższego twierdzenia nazywamy **resztą** z dzielenia a przez b, a liczbę q nazywamy **niepełnym ilorazem** z tego dzielenia. Jeśli $b \mid a$, to liczbę q nazywamy **ilorazem** z tego dzielenia.

Przykład 2.3.

1. Jeśli $a = 31$, $b = 9$, to $q = 3$, $r = 4$, ponieważ $31 = 3 \cdot 9 + 4$.
2. Jeśli $a = 31$, $b = -9$, to $q = -3$, $r = 4$, ponieważ $31 = -3 \cdot (-9) + 4$.
3. Jeśli $a = -31$, $b = 9$, to $q = -4$, $r = 5$, ponieważ $-31 = (-4) \cdot 9 + 5$.
4. Jeśli $a = -31$, $b = -9$, to $q = 4$, $r = 5$, ponieważ $-31 = 4 \cdot (-9) + 5$.

Uwaga 2.4. Należy bezwzględnie pamiętać o tym, że reszta r z dzielenia jest zawsze liczbą nieujemną. Do reszty r tak dobieramy niepełny iloraz q, aby zachodziła równość (2.1).

Na zakończenie tego podrozdziału przypomnijmy cechy podzielności, które pozwalają na szybkie sprawdzenie, bez konieczności przeprowadzania dzielenia, czy dana liczba jest podzielna bez reszty przez inną liczbę. Ograniczymy się tutaj do przedstawienia cech podzielności dla kilku liczb:

- $2 \mid n$, jeśli ostatnia cyfra liczby n jest parzysta.
- $3 \mid n$, jeśli suma cyfr liczby n jest podzielna przez 3.
- $4 \mid n$, jeśli dwie ostatnie cyfry liczby n tworzą liczbę podzielną przez 4.
- $5 \mid n$, jeśli ostatnią cyfrą liczby n jest 0 lub 5.

- $7 \mid n$, jeśli suma naprzemienna liczb, które powstaną po pogrupowaniu cyfr liczby n trójkami (zaczynając od prawej), jest podzielna przez 7.
- $8 \mid n$, jeśli trzy ostatnie cyfry liczby n tworzą liczbę podzielną przez 8.
- $9 \mid n$, jeśli suma cyfr liczby n jest podzielna przez 9.
- $11 \mid n$, jeśli naprzemienna suma cyfr liczby n jest podzielna przez 11.
- $13 \mid n$, jeśli naprzemienna suma liczb, które powstaną po pogrupowaniu cyfr liczby n trójkami (zaczynając od prawej), jest podzielna przez 13.

Powyżej celowo pominęliśmy liczby 6, 10 i 12. Cechy podzielności dla tych liczb (oraz dla 14 i 15) omówimy na końcu rozdziału 2.3 na stronie 42.

Przykład 2.5.

1. Niech $a = 6\,379\,586$. Wtedy $2 \mid a$, ponieważ ostatnią cyfrą a jest 6, która jest parzysta.
2. Niech $b = 2\,686\,863$. Wtedy $3 \mid b$, ponieważ $2+6+8+6+8+6+3 = 39$ oraz $3 \mid 39$.
3. Niech $c = 22\,738\,848$. Wtedy $4 \mid c$, ponieważ na końcu c jest dwucyfrowa liczba 48, która jest podzielna przez 4.
4. Niech $d = 34\,567\,525$. Wtedy $5 \mid d$, ponieważ na końcu d jest cyfra 5.
5. Niech $f = 2\,172\,912$. Wtedy $7 \mid f$, ponieważ $2 - 172 + 912 = 742$ i $7 \mid 742$.
6. Niech $g = 77\,269\,936$. Wtedy $8 \mid g$, ponieważ ostatnie trzy cyfry g tworzą liczbę 936, która jest podzielna przez 8.
7. Niech $h = 7\,878\,258$. Wtedy $9 \mid h$, ponieważ $7+8+7+8+2+5+8 = 45$ oraz $9 \mid 45$.
8. Niech $j = 940\,412$. Wtedy $11 \mid j$, ponieważ $9-4+0-4+1-2 = 0$ oraz $11 \mid 0$.
9. Niech $l = 7\,207\,356$. Wtedy $13 \mid l$, ponieważ $7 - 207 + 356 = 156$ i $13 \mid 156$.

2.2. Liczby pierwsze i złożone

Liczby pierwsze mają bardzo prostą definicję, która znana jest już uczniom szkół podstawowych, a choć znane były już w starożytności, to nadal są przedmiotem fascynacji wielu profesjonalnych matematyków oraz pasjonatów nie związanych zawodowo z matematyką. Na przykład niezwykle prosta w swym sformułowaniu hipoteza Goldbacha (postawiona tak naprawdę przez Eulera w 1742 roku), pozostaje ciągle nierozstrzygnięta – nie doczekała się dowodu, jak też nie znaleziono dotychczas kontrprzykładu.

Hipoteza 2.6. (Hipoteza Goldbacha) *Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch (niekoniecznie różnych) liczb pierwszych.*

Rozpocznijmy od przypomnienia definicji liczby pierwszej i liczby złożonej.

Definicja 2.7. Liczbę naturalną $n > 1$ nazywamy **liczbą pierwszą**, jeśli ma dokładnie dwa dzielniki naturalne: 1 oraz n.

Zbiór liczb pierwszych oznaczamy $\mathbb{P}$. W chwili pisania tego tekstu największą znaną liczbą pierwszą jest

$$2^{136\ 279\ 841} - 1,$$

która ma ponad 41 milionów cyfr i została odkryta 12 października 2024 r. Poniższe twierdzenie znane było już starożytnym Grekom.

Twierdzenie 2.8. *Zbiór $\mathbb{P}$ liczb pierwszych jest nieskończony.*

Definicja 2.9. Liczbę naturalną $n > 1$ nazywamy **liczbą złożoną**, jeśli nie jest liczbą pierwszą.

Zauważmy, że liczb złożonych jest także nieskończenie wiele. Wystarczy wziąć pod uwagę wszystkie potęgi dowolnej liczby naturalnej większej od 1.

Uwaga 2.10. Liczba 1 nie jest ani liczbą pierwszą, ani liczbą złożoną.

Celem tego podrozdziału są twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych oraz całkowitych, które prezentujemy poniżej.

Twierdzenie 2.11. *Każdą liczbę naturalną $n > 1$ można przedstawić jednoznacznie w postaci iloczynu potęg liczb pierwszych:*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

gdzie $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ są liczbami pierwszymi oraz $k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.12. *Każdą liczbę całkowitą n różną od $0, 1, -1$ można przedstawić jednoznacznie w postaci:*

$$n = \operatorname{sgn}(n) \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

gdzie $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ są liczbami pierwszymi oraz $k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$.

Użyta w powyższym twierdzeniu funkcja sgn gwarantuje nam uwzględnienie znaku liczby n, a jej wartości są następujące:

$$\operatorname{sgn}(n) = \begin{cases} -1, & \text{dla } n < 0, \\ 0, & \text{dla } n = 0, \\ 1, & \text{dla } n > 0. \end{cases}$$

Rozkłady występujące w powyższych twierdzeniach nazywamy **rozkładami kanonicznymi** lub **rozkładami na czynniki pierwsze**.

Przykład 2.13. Przypomnijmy sposób na znalezienie rozkładu kanonicznego. Rozpoczynamy od zapisania liczby, której rozkładu szukamy i pionowej linii po jej prawej stronie. W każdym kroku algorytmu, dla liczby n – ostatniej (zapisanej najniżej) liczby po lewej stronie linii – szukamy najmniejszej liczby pierwszej p dzielącej liczbę n. Liczbę p zapisujemy po prawej stornie linii na przeciw liczby n. Poniżej n, po lewej stronie, zapisujemy iloraz n/p. Krok ten powtarzamy tak długo, aż otrzymamy iloraz równy 1. Działanie tego algorytmu zostało zilustrowane poniżej na przykładzie liczby $a = 1260$:

1260		1260	2	1260	2	1260	2	1260	2	1260	2	1260	2
		630		630	2	630	2	630	2	630	2	630	2
				315		315	3	315	3	315	3	315	3
						105		105	3	105	3	105	3
								35		35		35	5
										7		7	7
												1	

Otrzymany rozkład kanoniczny ma postać $a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Zauważmy, że w podrozdziale 2.1 (str. 38) zaprezentowaliśmy cechy podzielności, które możemy tu zastosować do szybkiego sprawdzenia, czy kolejne ilorazy są podzielne przez małe liczby pierwsze: $2, 3, 5, \ldots$.

W przypadku liczby ujemnej, procedura jest taka sama za wyjątkiem ostatecznej odpowiedzi, w której należy uwzględnić znak liczby, np. $-1260 = (-1) \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Uwaga 2.14. Na podstawie rozkładu kanonicznego liczby n w przykładzie 2.13 (str. 40) możemy wyznaczyć liczbę jej dzielników. Zauważmy, że każdy dzielnik naturalny liczby n ma postać $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7^w$, gdzie $x \in \{0, 1, 2\}$, $y \in \{0, 1, 2\}$, $z \in \{0, 1\}$, $w \in \{0, 1\}$. Mnożąc liczbę możliwych wartości, jakie może osiągnąć każdy z wykładników, otrzymujemy $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$. Stąd liczba dzielników naturalnych wynosi 36, natomiast liczba dzielników całkowitych wynosi $2 \cdot 36 = 72$. Zachęcamy czytelnika do przeprowadzenia analogicznego rozumowania dla mniejszych liczb oraz do wyprowadzenia wzoru ogólnego na liczbę dzielników dla liczby, która ma wyznaczony rozkład kanoniczny. Warto porównać tę uwagę z zadaniami 3.64 (str. 70) i 3.127 (str. 76).

2.3. Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność

W tym podrozdziale zaprezentujemy, jak wykorzystać rozkład kanoniczny liczb do wyznaczenia ich największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotności. Przypomnijmy definicje tych pojęć.

Definicja 2.15. Największym wspólnym dzielnikiem liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, gdzie liczby te nie wszystkie są równe 0, oznaczanym przez $NWD(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, nazywamy największą liczbę naturalną dzielącą każdą z tych liczb.

Definicja 2.16. Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$, oznaczanym przez $NWW(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, nazywamy najmniejszą liczbę naturalną dzielącą się przez każdą z tych liczb.

Przykład 2.17. Niech $a = 23\,760$, $b = 69\,300$. Rozkładamy podane liczby na czynniki pierwsze tak, jak to zaprezentowaliśmy w przykładzie 2.13 (str. 40) i otrzymujemy:

$$a = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11, \quad b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Wtedy:

1. $NWD(a, b) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 1980$.
   Wybieramy dzielniki pierwsze występujące jednocześnie w obu rozkładach: $2, 3, 5, 11$. Za wykładnik przy danym dzielniku przyjmujemy **mniejszy** z wykładników przy danym dzielniku w obu rozkładach: 2^2, 3^2, 5^1, 11^1. Powstałe czynniki mnożymy.

2. $NWW(a, b) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 831\,600$.
   Wybieramy wszystkie dzielniki pierwsze występujące w co najmniej jednym z rozkładów: $2, 3, 5, 7, 11$. Za wykładnik przy danym dzielniku przyjmujemy **większy** z wykładników przy danym dzielniku w obu rozkładach: 2^4, 3^3, 5^2, 7^1, 11^1. Powstałe czynniki mnożymy.

Wymienimy teraz podstawowe własności największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotności. Niech $a, d, m, a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$. Wtedy:

1. jeśli $d \mid a_1$, $d \mid a_2, \ldots, d \mid a_k$, to $d \mid NWD(a_1, a_2, \ldots, a_k)$,
2. jeśli $a_1 \mid m$, $a_2 \mid m, \ldots, a_k \mid m$, to $NWW(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid m$,
3. $NWD(a_1, a_2) \cdot NWW(a_1, a_2) = |a_1 \cdot a_2|$,
4. $NWD(a_1, \ldots, a_{k-2}, a_{k-1}, a_k) = NWD(a_1, \ldots, a_{k-2}, NWD(a_{k-1}, a_k))$,
5. $NWW(a_1, \ldots, a_{k-2}, a_{k-1}, a_k) = NWW(a_1, \ldots, a_{k-2}, NWW(a_{k-1}, a_k))$,
6. $NWD(a, 1) = 1$, $NWD(a, -1) = 1$,
7. jeśli $a_1 \mid a$, $a_2 \mid a$ oraz $NWD(a_1, a_2) = 1$, wtedy $a_1 a_2 \mid a$.

W podrozdziale 2.4 w przykładach 2.22, 2.23, 2.24 i 2.25 (str. 44-45) zaprezentujemy, jak zastosować powyższe własności w rozwiązywaniu zadań.

Wymieniając cechy podzielności na stronie 38 pominęliśmy liczby 6, 10 i 12. Są to liczby złożone, w których rozkładzie kanonicznym występuje więcej niż jeden czynnik pierwszy. W takich przypadkach korzystamy z cech podzielności dla liczb pierwszych lub ich potęg oraz zaprezentowanej powyżej własności 7. Wynikają stąd poniższe cechy podzielności:

- $6 \mid n$, jeśli $2 \mid n$ oraz $3 \mid n$.
- $10 \mid n$, jeśli $2 \mid n$ oraz $5 \mid n$, co oznacza, że ostatnią cyfrą liczby n jest 0.
- $12 \mid n$, jeśli $3 \mid n$ oraz $4 \mid n$.
- $14 \mid n$, jeśli $2 \mid n$ oraz $7 \mid n$.
- $15 \mid n$, jeśli $3 \mid n$ oraz $5 \mid n$.

Przykład 2.18.

1. Niech $e = 27\,526\,158$. Wtedy $6 \mid e$, ponieważ na końcu e jest cyfra 8, która jest parzysta, oraz $2 + 7 + 5 + 2 + 6 + 1 + 5 + 8 = 36$ i $3 \mid 36$ (zbadaliśmy podzielność przez 2 i 3).
2. Niech $i = 8\,651\,370$. Wtedy $10 \mid i$, ponieważ ostatnią cyfrą liczby i jest 0.
3. Niech $k = 6\,507\,720$. Wtedy $12 \mid k$, ponieważ $6 + 5 + 0 + 7 + 7 + 2 + 0 = 27$ oraz $3 \mid 27$, zaś na końcu k mamy dwucyfrową liczbę 20, która jest podzielna przez 4 (zbadaliśmy podzielność przez 3 i 4).
4. Niech $m = 1\,255\,128$. Wtedy $14 \mid m$ ponieważ na końcu m jest parzysta cyfra 8, zaś $1 - 255 + 128 = -126$ i $7 \mid -126$ (zbadaliśmy podzielność przez 2 i 7).
5. Niech $n = 978\,345$. Wtedy $15 \mid n$, ponieważ $9 + 7 + 8 + 3 + 4 + 5 = 36$ i $3 \mid 36$ oraz ostatnią cyfrą n jest 5 (zbadaliśmy podzielność przez 3 i 5).

2.4. Algorytm Euklidesa

Algorytm Euklidesa przedstawia metodę wyznaczania największego wspólnego dzielnika. Jest to jeden z najstarszych znanych algorytmów: jego pierwszy opis pojawił się w dziele Euklidesa zatytułowanym „Elementy” około trzysetnego roku przed naszą erą. Jego prostota i efektywność sprawiają, że do dziś pozostaje powszechnie znanym i szeroko stosowanym algorytmem.

Algorytm 2.19. (Algorytm Euklidesa)

Dane: $a, b \in \mathbb{Z}$, $|b| < |a|$.
Wynik: $NWD(a, b)$.

1. Definiujemy ciągi $r_{-1}, r_0, r_1, \ldots$ oraz $q_1, q_2, \ldots$ następująco:
   (a) przyjmujemy $r_{-1} = a$, $r_0 = b$;
   (b) jeśli mamy już określone liczby $r_{-1}, r_0, r_1, \ldots, r_{k-1}$, to r_k oraz q_k są wyznaczane z równości (2.1, str. 38), czyli:
   $$r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k, \qquad 0 \leq r_k < r_{k-1}; \tag{2.2}$$
   (c) wyznaczanie ciągów $r_{-1}, r_0, r_1, \ldots$ oraz $q_1, q_2, \ldots$ kontynuujemy do momentu, gdy $r_n = 0$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.
2. Zwracamy wynik $NWD(a, b) = r_{n-1}$.

Zauważmy, że niepełne ilorazy obliczane podczas stosowania powyższego algorytmu nie wpływają na wartość największego wspólnego dzielnika. W związku z tym w praktyce pomijamy je, w kolejnych krokach wyznaczając jedynie reszty i wykorzystując równość:

$$NWD(qb + r, b) = NWD(b, r), \quad q, b, r \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r < b. \tag{2.3}$$

Przykład 2.20. Niech $a = 111$, $b = 48$. W celu przeprowadzenia algorytmu Euklidesa proponujemy zbudowanie wygodnej tabeli, którą prezentujemy poniżej. W pierwszym wierszu zapisujemy równość (2.2) dla $r_{-1} = a = 111$, $r_0 = b = 48$, wyznaczając $q_1 = 2$ oraz $r_1 = 15$. W drugim wierszu dla $r_0 = 48$, $r_1 = 15$ wyznaczamy $q_2 = 3$ oraz $r_2 = 3$. Reszta nadal jest niezerowa, więc kontynuujemy algorytm: w trzecim wierszu dla $r_1 = 15$, $r_2 = 3$ wyznaczamy $q_3 = 5$ oraz $r_3 = 0$. Ponieważ reszta r_3 jest równa zero, zatem kończymy algorytm przyjmując $NWD(48, 111) = r_2 = 3$ jako ostatnią niezerową resztę.

k	$r_{k-2} = q_k \cdot r_{k-1} + r_k$
1	$111 = 2 \cdot 48 + 15$
2	$48 = 3 \cdot 15 + 3$
3	$15 = 5 \cdot 3 + 0$

Stosując wzór (2.3) działanie algorytmu Euklidesa zapiszemy ciągiem równości:

$$NWD(111, 48) = NWD(48, 15) = NWD(15, 3) = NWD(3, 0) = 3.$$

Przykład 2.21. Zaprezentowaną metodę możemy zastosować do trzech lub więcej liczb. Załóżmy, że chcemy wyznaczyć $NWD(105, 147, 161)$. W kolejnych krokach najmniejszą różną od zera liczbę przepisujemy, a pozostałe liczby zastępujemy resztami z dzielenia przez nią. Procedurę tą kontynuujemy, aż otrzymamy wszystkie reszty – poza jedną – równe zero:

$NWD(105, 147, 161) = NWD(105, 42, 56)$, ponieważ reszta z dzielenia 147 przez 105 wynosi 42 oraz reszta z dzielenia 161 przez 105 wynosi 56. Kontynuujemy:

$NWD(105, 42, 56) = NWD(42, 21, 14)$, ponieważ reszta z dzielenia 105 przez 42 wynosi 21 oraz reszta z dzielenia 56 przez 42 wynosi 14. Dalej:

$NWD(42, 21, 14) = NWD(14, 0, 7)$, ponieważ reszta z dzielenia 42 przez 14 wynosi 0 oraz reszta z dzielenia 21 przez 14 wynosi 7. Kontynuujemy:

$NWD(14, 0, 7) = NWD(7, 0, 0)$, ponieważ reszta z dzielenia 14 przez 7 wynosi 0 oraz reszta z dzielenia 0 przez 7 wynosi 0. Kończymy działanie algorytmu:

$NWD(7, 0, 0) = 7$.

Podsumujmy poznane metody wyznaczania największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotności. Aby wyznaczyć największy wspólny dzielnik, mamy do dyspozycji:

1. rozkład na czynniki pierwsze (przykład 2.17, str. 41), metoda dla dwóch lub więcej liczb,
2. algorytm Euklidesa (pełny zapis, przykład 2.20, str. 43), metoda dla dokładnie dwóch liczb,
3. algorytm Euklidesa (szybki zapis, przykład 2.21, str. 43), metoda dla dwóch lub więcej liczb.

Aby wyznaczyć najmniejszą wspólną wielokrotność, mamy do dyspozycji na ten moment rozkład na czynniki pierwsze (przykład 2.17, str. 41) – jest to metoda dla dwóch lub więcej liczb. Zauważmy, że w podrozdziale 2.3 mamy własność 3 (str. 42), która może być wykorzystana do wyznaczenia najmniejszej wspólnej wielokrotności dwóch liczb, pod warunkiem, że znamy ich największy wspólny dzielnik. Odpowiedni przykład znajduje się poniżej.

Przykład 2.22. Niech $a = 111$, $b = 48$. Wtedy na podstawie przykładu 2.20 (str. 43) mamy $NWD(111, 48) = 3$ oraz na podstawie własności 3 (str. 42) otrzymujemy:

$$NWW(48, 111) = \frac{48 \cdot 111}{NWD(48, 111)} = \frac{5328}{3} = 1776.$$

Tę samą własność można wykorzystać do pewnego szczególnego typu zadań, o czym mówi poniższy przykład.

Przykład 2.23. Wyznaczmy liczby naturalne a i b wiedząc, że $NWW(a, b) = 63$ oraz $NWD(a, b) = 3$. Zauważmy, że:

$$NWW(a, b) \cdot NWD(a, b) = a \cdot b = \underbrace{x \cdot NWD(a, b)}_{a} \cdot \underbrace{y \cdot NWD(a, b)}_{b},$$

dla takich liczb $x, y \in \mathbb{N}$, że $NWD(x, y) = 1$. Podstawiając znane nam wartości liczbowe otrzymujemy: $63 \cdot 3 = x \cdot 3 \cdot y \cdot 3$, co po uproszczeniu daje równość $x \cdot y = 21$. Szukamy zatem wszystkich par liczb naturalnych spełniających warunki $x \cdot y = 21$ oraz $NWD(x, y) = 1$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 21 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = 21 \\ y = 1, \end{cases}$$

a stąd możliwe wartości liczb a i b to:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 63 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = 9 \\ b = 21 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = 21 \\ b = 9 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = 63 \\ b = 3. \end{cases}$$

Zaprezentujmy na dwóch prostych przykładach, jak działają własności 4 i 5 (str. 42).

Przykład 2.24. Chcemy obliczyć $NWD(161, 147, 105)$. Zgodnie z własnością 4 (str. 42), obliczenia możemy wykonać etapami. Najpierw obliczamy $NWD(147, 105) = 21$, a następnie liczby 147, 105 w początkowym wyrażeniu zastępujemy tym wynikiem i znajdujemy $NWD(161, 21) = 7$. Odpowiedni zapis wygląda następująco:

$$NWD(161, 147, 105) = NWD(161, NWD(147, 105)) = NWD(161, 21) = 7.$$

Przykład 2.25. Chcemy obliczyć $NWW(161, 147, 105)$. Zgodnie z własnością 5 (str. 42), obliczenia możemy wykonać etapami. Najpierw obliczamy $NWW(147, 105) = 735$, a następnie liczby 147, 105 w wyrażeniu $NWW(161, 147, 105)$ zastępujemy otrzymanym wynikiem i wyznaczamy $NWW(161, 735) = 16905$. Odpowiedni zapis wygląda następująco:

$$NWW(161, 147, 105) = NWW(161, NWW(147, 105)) = NWW(161, 735) = 16905.$$

Wiele problemów można sprowadzić do zagadnienia poszukiwania rozwiązań równań liniowych w zbiorze liczb całkowitych. Wówczas użyteczna okazuje się wersja rozszerzona algorytmu Euklidesa, którą zaprezentujemy na zakończenie tego podrozdziału. Oprócz największego wspólnego dzielnika, algorytm ten wyznacza także liczby, o których mowa w tezie poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 2.26. *Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Wtedy istnieją liczby $x, y \in \mathbb{Z}$, dla których zachodzi równość $ax + by = NWD(a, b)$.*

Algorytm 2.27. (Rozszerzony algorytm Euklidesa)

Dane $a, b \in \mathbb{Z}$, $|b| < |a|$.
Wynik: $NWD(a, b)$ oraz takie liczby $x, y \in \mathbb{Z}$, że $ax + by = NWD(a, b)$.

1. Przeprowadzamy algorytm Euklidesa 2.19 (str. 43), w wyniku którego otrzymujemy $NWD(a, b) = r_{n-1}$.
2. Definiujemy ciągi $u_{-1}, u_0, u_1, \ldots$ oraz $v_{-1}, v_0, v_1, \ldots$ następująco:
   (a) przyjmujemy $u_{-1} = 1$, $u_0 = 0$, $v_{-1} = 0$, $v_0 = 1$;
   (b) jeśli mamy określone liczby $u_{-1}, u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ i $v_{-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$, to u_k oraz v_k są wyznaczane następująco:
$$u_k = u_{k-2} - q_k \cdot u_{k-1}, \qquad v_k = v_{k-2} - q_k \cdot v_{k-1}. \tag{2.4}$$
3. Zwracamy: $x = u_{n-1}$, $y = v_{n-1}$.

Przykład 2.28. Niech $a = 357$, $b = 161$. W pierwszej kolejności przeprowadzamy algorytm Euklidesa 2.19 (str. 43), stąd mamy poniższą tabelę i $NWD(357, 161) = 7$.

k	$r_{k-2} = q_k \cdot r_{k-1} + r_k$
1	$357 = 2 \cdot 161 + 35$
2	$161 = 4 \cdot 35 + 21$
3	$35 = 1 \cdot 21 + 14$
4	$21 = 1 \cdot 14 + 7$
5	$14 = 2 \cdot 7 + 0$

Drugą część rozszerzonego algorytmu Euklidesa także można przeprowadzić posługując się wygodną tabelą, którą budujemy następująco:

1. w pierwszej kolumnie wpisujemy wartości indeksu i, zaczynając od -1 i kończąc na $n-1=4$ (tu $n=5$, bo w tylu krokach zakończył się algorytm Euklidesa),
2. w drugiej kolumnie wpisujemy wartości q_k dla $k=1,\ldots,n-1$; liczby te pobieramy z pierwszej tabeli,
3. w trzeciej i czwartej kolumnie wpisujemy wartości początkowe elementów u_{-1}, u_0, v_{-1}, v_0, które podane są w podpunkcie 2a (str. 45) powyższego algorytmu,
4. w trzeciej i czwartej kolumnie wpisujemy wartości elementów u_k i v_k, które obliczamy ze wzorów (2.4, str. 45).

k	q_k	u_k	v_k
-1	$\times$	1	0
0	$\times$	0	1
1	2	1	-2
2	4	-4	9
3	1	5	-11
4	1	-9	20

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_{-1} - q_1 \cdot u_0 = 1 - 2 \cdot 0 = 1\\
v_1 &= v_{-1} - q_1 \cdot v_0 = 0 - 2 \cdot 1 = -2\\
u_2 &= u_0 - q_2 \cdot u_1 = 0 - 4 \cdot 1 = -4\\
v_2 &= v_0 - q_2 \cdot v_1 = 1 - 4 \cdot (-2) = 9\\
u_3 &= u_1 - q_3 \cdot u_2 = 1 - 1 \cdot (-4) = 5\\
v_3 &= v_1 - q_3 \cdot v_2 = -2 - 1 \cdot 9 = -11\\
u_4 &= u_2 - q_4 \cdot u_3 = -4 - 1 \cdot 5 = -9 = x\\
v_4 &= v_2 - q_4 \cdot v_3 = 9 - 1 \cdot (-11) = 20 = y
\end{aligned}$$

5. Na koniec sprawdzamy poprawność otrzymanego wyniku:

$$357 \cdot (-9) + 161 \cdot 20 = -3213 + 3220 = 7. \quad \checkmark$$

2.5. Liczby względnie pierwsze

Na zakończenie tego rozdziału podamy definicje liczb względnie pierwszych i parami względnie pierwszych oraz funkcji Eulera.

Definicja 2.29. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$. Mówimy, że liczby $a_1, a_2, \ldots, a_k$ są **względnie pierwsze**, jeśli $NWD(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$.

Definicja 2.30. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$. Mówimy, że liczby $a_1, a_2, \ldots, a_k$ są **parami względnie pierwsze**, jeśli $NWD(a_i, a_j) = 1$ dla wszystkich takich par $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, że $i \neq j$.

Przykład 2.31. Niech $a = 75$, $b = 87$, $c = 121$.

1. Podane liczby są względnie pierwsze, ponieważ $NWD(75, 87, 121) = 1$.
2. W celu sprawdzenia, czy podane liczby są parami względnie pierwsze, należy sprawdzić największy wspólny dzielnik każdej z par:

$$NWD(75, 87) = 3, \quad NWD(75, 121) = 1, \quad NWD(87, 121) = 1.$$

   Gdyby największy wspólny dzielnik każdej z par wynosił 1, to te liczby byłyby parami względnie pierwsze. Jednakże $NWD(75, 87) = 3$, dlatego też podane liczby nie są parami względnie pierwsze.

Definicja 2.32. **Funkcją Eulera** nazywamy taką funkcję $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, która każdej liczbie naturalnej przypisuje liczbę liczb względnie pierwszych z nią i nie większych od niej.

Wartość funkcji Eulera dla dowolnej liczby naturalnej można obliczyć dysponując jej rozkładem na czynniki pierwsze, o czym mówi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.33. *Niech* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $k \in \mathbb{N}$, *będzie rozkładem na czynniki pierwsze liczby* n. *Wtedy*

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdot p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1). \tag{2.5}$$

Przykład 2.34. Niech $n = 21\,600$. W pierwszej kolejności znajdujemy rozkład liczby n na czynniki pierwsze:

$$21\,600 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2,$$

Następnie, korzystając ze wzoru (2.5), otrzymujemy:

$$\varphi(21\,600) = \varphi(2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2) = 2^4 \cdot (2-1) \cdot 3^2 \cdot (3-1) \cdot 5^1 \cdot (5-1) = 5760.$$

Wynik ten oznacza, że istnieje 5760 liczb względnie pierwszych z 21 600, które są nie większe od 21 600.

Z twierdzenia 2.33 możemy wyciągnąć następujący wniosek.

Twierdzenie 2.35. *Funkcja* φ *Eulera jest funkcją multiplikatywną: dla względnie pierwszych liczb* $m, n \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n).$$

2.6. Zadania

Zadanie 2.1. Dla własności podzielności 1 – 5 (str. 38) dobierz takie liczby $a, b, m \in \mathbb{Z}$, aby prawdziwe były poprzedniki implikacji. Następnie zweryfikuj prawdziwość ich następników.

Zadanie 2.2. Wyznacz resztę r oraz niepełny iloraz q z dzielenia a przez b, jeżeli:

a) $a = 15$, $b = 7$,	e) $a = 43$, $b = 13$,	i) $a = 200$, $b = 35$,
b) $a = -15$, $b = 7$,	f) $a = -43$, $b = 13$,	j) $a = -200$, $b = 35$,
c) $a = 15$, $b = -7$,	g) $a = 43$, $b = -13$,	k) $a = 200$, $b = -35$,
d) $a = -15$, $b = -7$,	h) $a = -43$, $b = -13$,	l) $a = -200$, $b = -35$.

Zadanie 2.3. Stosując odpowiednie cechy podzielności liczb, uzasadnij, że:

a) $2 \mid 64\,536$,	f) $7 \mid 3\,948\,861$,	k) $12 \mid 7\,049\,076$,	p) $21 \mid 1\,180\,914$,
b) $3 \mid 176\,895$,	g) $8 \mid 417\,472$,	l) $13 \mid 763\,646$,	q) $22 \mid 1\,440\,516$,
c) $4 \mid 234\,968$,	h) $9 \mid 856\,512$,	m) $14 \mid 733\,096$,	r) $24 \mid 1\,353\,336$,
d) $5 \mid 547\,855$,	i) $10 \mid 145\,820$,	n) $15 \mid 852\,630$,	s) $26 \mid 6\,128\,148$,
e) $6 \mid 39\,504$,	j) $11 \mid 2\,801\,557$,	o) $18 \mid 1\,541\,214$,	t) $30 \mid 137\,010$.

Zadanie 2.4. Wybierz dowolną ośmiocyfrową liczbę $x \in \mathbb{N}$. Stosując odpowiednie cechy podzielności, sprawdź, czy wybrana liczba x jest podzielna przez liczby od 2 do 15.

Zadanie 2.5. Wyznacz rozkład kanoniczny poniższych liczb:

a) $42\,768$, c) $17\,712$, e) -3375, g) $82\,320$,

b) $-508\,079$, d) $10\,800$, f) $6\,462\,720$, h) $-348\,480$.

Zadanie 2.6. Rozkładając na czynniki pierwsze podane liczby, oblicz ich NWD:

a) 5292, 5544,

b) 9075, $-32\,175$,

c) $14\,175$, $75\,600$,

d) -3375, 4320, $82\,320$,

e) 2520, -5184, $10\,584$,

f) -3003, 5040, $-14\,994$,

g) 3024, 6048, 9072, $10\,584$,

h) 3640, 4080, 4320, -5525.

Zadanie 2.7. Rozkładając na czynniki pierwsze liczby z zadania 2.6, wyznacz ich NWW.

Zadanie 2.8. Stosując algorytm Euklidesa („pełny zapis"), oblicz NWD podanych liczb:

a) 5, 8, c) 462, 1260, e) 4370, 5720,

b) 87, -237, d) -525, -2345, f) -6948, $178\,542$.

Zadanie 2.9. Stosując algorytm Euklidesa („szybki zapis"), oblicz NWD liczb z zadań 2.6 oraz 2.8.

Zadanie 2.10. Dla własności NWD i NWW numer 1 i 2 (str. 42) dobierz takie liczby $d, m, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}$, aby prawdziwe były poprzedniki implikacji. Następnie zweryfikuj prawdziwość ich następników.

Zadanie 2.11. Stosując odpowiedni wzór (własność 3, str. 42), oblicz NWW liczb z zadania 2.8.

Zadanie 2.12. Stosując odpowiedni wzór (własność 4, str. 42), oblicz NWD podanych liczb:

a) 28, 42, 70,

b) 715, 990, 1001,

c) 3570, 4116, 5607,

d) 5928, 6396, 8385, 9685,

e) 8320, 9180, $11\,250$, $14\,157$,

f) $2197, 3780, 4352, 7128, 13\,310$.

Zadanie 2.13. Stosując odpowiedni wzór (własność 5, str. 42), oblicz NWW liczb z zadania 2.12 (*Uwaga: uzyskane liczby, mogą być bardzo duże, dlatego warto się posługiwać rozkładami na czynniki pierwsze*).

Zadanie 2.14. Wiedząc, że $NWW(a, b) = 99$ oraz $NWD(a, b) = 11$, wyznacz $a, b \in \mathbb{N}$.

Zadanie 2.15. Wiedząc, że $NWW(a, b) = 180$ oraz $NWD(a, b) = 45$, wyznacz $a, b \in \mathbb{N}$.

Zadanie 2.16. Wiedząc, że $NWW(a, b) = 210$ oraz $NWD(a, b) = 3$, wyznacz $a, b \in \mathbb{N}$.

Zadanie 2.17. Wiedząc, że $NWW(a, b) = 3120$ oraz $NWD(a, b) = 13$, wyznacz $a, b \in \mathbb{N}$.

Zadanie 2.18. Wiedząc, że $NWW(a, b) = 1980$ oraz $NWD(a, b) = 11$, wyznacz $a, b \in \mathbb{N}$.

Zadanie 2.19. Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa, oblicz $NWD(a,b)$ oraz takie liczby $x, y \in \mathbb{Z}$, że $ax + by = NWD(a,b)$, jeśli:

a) $a = 61$, $b = 7$,

b) $a = -84$, $b = 15$,

c) $a = 123$, $b = 93$,

d) $a = 241$, $b = -79$,

e) $a = 377$, $b = 123$,

f) $a = -533$, $b = -187$,

g) $a = 777$, $b = 555$,

h) $a = -1140$, $b = 570$,

i) $a = 76\,501$, $b = 29\,719$.

Zadanie 2.20. Sprawdź, czy poniższe liczby są względnie pierwsze oraz czy są parami względnie pierwsze:

a) 24, 33, 44,

b) 150, 169, 325,

c) 196, 225, 289,

d) 256, 729, 3125,

e) 1918, 4080, 5125, 6375,

f) 4913, 5733, 6859, 14 641.

Zadanie 2.21. Wyznacz wartość funkcji φ Eulera dla liczb z zadania 2.5. (*Uwaga: jeśli podana liczba jest ujemna, rozważ liczbę do niej przeciwną.*)

2.7. Odpowiedzi

Odpowiedź 2.1. —

Odpowiedź 2.2.

a) $q = 2$, $r = 1$,

b) $q = -3$, $r = 6$,

c) $q = -2$, $r = 1$,

d) $q = 3$, $r = 6$,

e) $q = 3$, $r = 4$,

f) $q = -4$, $r = 9$,

g) $q = -3$, $r = 4$,

h) $q = 4$, $r = 9$,

i) $q = 5$, $r = 25$,

j) $q = -6$, $r = 10$,

k) $q = -5$, $r = 25$,

l) $q = 6$, $r = 10$.

Odpowiedź 2.3.

a) $2 \mid 64\,536$, ponieważ na końcu $64\,536$ jest cyfra 6, która jest parzysta.

b) $3 \mid 176\,895$, ponieważ $1 + 7 + 6 + 8 + 9 + 5 = 36$ i $3 \mid 36$.

c) $4 \mid 234\,968$, ponieważ na końcu $234\,968$ jest dwucyfrowa liczba 68, która jest podzielna przez 4.

d) $5 \mid 547\,855$, ponieważ na końcu $547\,855$ jest cyfra 5.

e) $6 \mid 39\,504$, ponieważ na końcu $39\,504$ jest cyfra 4, która jest parzysta, oraz $3 + 9 + 5 + 0 + 4 = 21$ i $3 \mid 21$.

f) $7 \mid 3\,948\,861$, ponieważ $3 - 948 + 861 = -84$ i $7 \mid 84$.

g) $8 \mid 417\,472$, ponieważ na końcu $417\,472$ jest trzycyfrowa liczba 472, która jest podzielna przez 8.

h) $9 \mid 856\,512$, ponieważ $8 + 5 + 6 + 5 + 1 + 2 = 27$ i $9 \mid 27$.

i) $10 \mid 145\,820$, ponieważ na końcu 145820 jest cyfra 0.

j) $11 \mid 2\,801\,557$, ponieważ $2-8+0-1+5-5+7=0$ i $11 \mid 0$.

k) $12 \mid 7\,049\,076$, ponieważ $7+0+4+9+0+7+6=33$ i $3 \mid 33$ oraz na końcu 7049076 jest dwucyfrowa liczba 76, która jest podzielna przez 4.

l) $13 \mid 763\,646$, ponieważ $763-646=117$ i $13 \mid 117$.

m) $14 \mid 733\,096$, ponieważ na końcu 733 096 jest cyfra 6, która jest parzysta, oraz $733-096=637$ i $7 \mid 637$.

n) $15 \mid 852\,630$, ponieważ $8+5+2+6+3+0=24$ i $3 \mid 24$ oraz na końcu 852630 jest cyfra 0.

o) $18 \mid 1\,541\,214$, ponieważ na końcu 1 541 214 jest cyfra 4, która jest parzysta, oraz $1+5+4+1+2+1+4=18$ i $9 \mid 18$.

p) $21 \mid 1\,180\,914$, ponieważ $1+1+8+0+9+1+4=24$ i $3 \mid 24$ oraz $1-180+914=735$ i $7 \mid 735$.

q) $22 \mid 1\,440\,516$, ponieważ na końcu 1 440 516 jest cyfra 6, która jest parzysta, oraz $1-4+4-0+5-1+6=11$ i $11 \mid 11$.

r) $24 \mid 1\,353\,336$, ponieważ $1+3+5+3+3+3+6=24$ i $3 \mid 24$ oraz na końcu 1 353 336 jest trzycyfrowa liczba 336, która jest podzielna przez 8.

s) $26 \mid 6\,128\,148$, ponieważ na końcu 6 128 148 jest cyfra 8, która jest parzysta, oraz $6-128+148=26$ i $13 \mid 26$.

t) $30 \mid 137\,010$, ponieważ $1+3+7+0+1+0=12$ i $3 \mid 12$ oraz na końcu 137 010 jest cyfra 0.

Odpowiedź 2.4. —

Odpowiedź 2.5.

a) $2^4 \cdot 3^5 \cdot 11$,
b) $-11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$,
c) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 41$,
d) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$,
e) $-3^3 \cdot 5^3$,
f) $2^8 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$,
g) $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^3$,
h) $-2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^2$.

Odpowiedź 2.6.

a) 252,
b) 825,
c) 4725,
d) 15,
e) 72,
f) 21,
g) 1512,
h) 5.

Odpowiedź 2.7.

a) 116 424,
b) 353 925,
c) 226 800,
d) 37 044 000,
e) 1 270 080,
f) 85 765 680,
g) 127 008,
h) 33 415 200.

Odpowiedź 2.8.

a) 1, b) 3, c) 42, d) 35, e) 10, f) 18.

Odpowiedź 2.9. Odpowiedzi tak jak w odpowiedziach 2.6 oraz 2.8.

Odpowiedź 2.10. —

Odpowiedź 2.11.

a) 40, c) 13 860, e) 2 499 640,

b) 6873, d) 35 175, f) 68 917 212.

Odpowiedź 2.12.

a) 14, b) 11, c) 21, d) 13, e) 1, f) 1.

Odpowiedź 2.13.

a) 420,

b) 90 090,

c) $93\,412\,620 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 17 \cdot 89$,

d) $7\,786\,042\,680 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 149$,

e) $57\,760\,560\,000 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17$,

f) $36\,078\,632\,029\,440 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17$.

Odpowiedź 2.14.

$$\begin{cases} a = 11 \\ b = 99 \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} a = 99 \\ b = 11 \end{cases}$$

Odpowiedź 2.15.

$$\begin{cases} a = 45 \\ b = 180 \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} a = 180 \\ b = 45 \end{cases}$$

Odpowiedź 2.16.

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 210 \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} a = 210 \\ b = 3 \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} a = 6 \\ b = 105 \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} a = 105 \\ b = 6 \end{cases} \text{lub}$$

$$\begin{cases} a = 15 \\ b = 42 \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} a = 42 \\ b = 15 \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} a = 21 \\ b = 30 \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} a = 30 \\ b = 21 \end{cases}$$

Odpowiedź 2.17.

$\begin{cases} a = 13 \\ b = 3120 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 3120 \\ b = 13 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 208 \\ b = 195 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 195 \\ b = 208 \end{cases}$ lub

$\begin{cases} a = 39 \\ b = 1040 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 1040 \\ b = 39 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 65 \\ b = 624 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 624 \\ b = 65 \end{cases}$

Odpowiedź 2.18.

$\begin{cases} a = 11 \\ b = 1980 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 1980 \\ b = 11 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 44 \\ b = 495 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 495 \\ b = 44 \end{cases}$ lub

$\begin{cases} a = 55 \\ b = 396 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 396 \\ b = 55 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 99 \\ b = 220 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 220 \\ b = 99 \end{cases}$

Odpowiedź 2.19.

a) $NWD(a, b) = 1$,
$x = 3$, $y = -26$,

b) $NWD(a, b) = 3$,
$x = -2$, $y = -11$,

c) $NWD(a, b) = 3$,
$x = -3$, $y = 4$,

d) $NWD(a, b) = 1$,
$x = 20$, $y = 61$,

e) $NWD(a, b) = 1$,
$x = -46$, $y = 141$,

f) $NWD(a, b) = 1$,
$x = -20$, $y = 57$,

g) $NWD(a, b) = 111$,
$x = -2$, $y = 3$,

h) $NWD(a, b) = 570$,
$x = 0$, $y = 1$,

i) $NWD(a, b) = 113$,
$x = 54$, $y = -139$.

Odpowiedź 2.20.

a) Względnie pierwsze: T,
Parami wzgl. pier.: N,

b) Względnie pierwsze: T,
Parami wzgl. pier.: N,

c) Względnie pierwsze: T,
Parami wzgl. pier.: T,

d) Względnie pierwsze: T,
Parami wzgl. pier.: T,

e) Względnie pierwsze: T,
Parami wzgl. pier.: N,

f) Względnie pierwsze: T,
Parami wzgl. pier.: T.

Odpowiedź 2.21.

a) 12 960,

b) 380 160,

c) 5 760,

d) 2 880,

e) 1 800,

f) 1 474 560,

g) 18 816,

h) 84 480.

Rozdział 3

Elementy kombinatoryki

W tym rozdziale przedstawimy wybrane pojęcia kombinatoryczne, które służą do zliczania elementów zbiorów skończonych. W tym celu na początku wprowadzimy definicję silni i symbolu Newtona oraz pokażemy związek z trójkątem Pascala i dwumianem Newtona. Następnie przedstawimy pojęcia wariacji, permutacji, kombinacji oraz prawo mnożenia i prawo dodawania. Są to pojęcia zwykle omawiane w szkole średniej, jednakże wymagają gruntownego powtórzenia, dlatego też są zilustrowane za pomocą dużej liczby zadań. Na zakończenie podamy zasadę włączania i wyłączania oraz zasadę szufladkową Dirichleta.

3.1. Silnia i symbol Newtona

Rozpoczniemy od przypomnienia dwóch podstawowych pojęć związanych z kombinatoryką, a dokładniej silni oraz symbolu Newtona. W drugiej części podrozdziału pokażemy ich związek z trójkątem Pascala i dwumianem Newtona.

Silnia liczby naturalnej n to iloczyn wszystkich liczb naturalnych nie większych niż n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Uwaga 3.1. Podczas obliczeń możemy się natknąć na wyrażenie $0!$. W takiej sytuacji przyjmujemy $0! = 1$.

Przykład 3.2.

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120, \qquad 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800,$$

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320, \qquad 20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000.$$

Jako ciekawostkę możemy podać (jedyne) cztery liczby, dla których suma silni cyfr jest równa tym liczbom:

$$1! = 1, \qquad 2! = 2, \qquad 1! + 4! + 5! = 145, \qquad 4! + 0! + 5! + 8! + 5! = 40585.$$

Symbol Newtona to funkcja dwóch argumentów zadana wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gdzie $n, k \in \mathbb{N}_0$ oraz $k \leq n$. Dla $k > n$ przyjmujemy $\binom{n}{k} = 0$. Powyższy symbol czytamy „*n po k*".

Przykład 3.3. Obliczając wartość symbolu Newtona, warto pamiętać o możliwości skrócenia licznika z mianownikiem, aby uniknąć zbyt dużych liczb:

1. $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = \frac{2 \cdot 5}{1} = 2 \cdot 5 = 10,$

2. $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = \frac{5 \cdot 3}{1} = 5 \cdot 3 = 15,$

3. $\binom{20}{15} = \frac{10!}{15!(20-15)!} = \frac{20!}{15! \cdot 5!} = \frac{15! \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{15! \cdot 5!} =$
$$= \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 19}{1} = 15\,504.$$

Uwzględniając uwagę 3.1 (str. 53), bez trudu uzasadnimy poniższe własności:

1. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1,$

2. $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1,$

3. $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)!} = n,$

4. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k},$

5. $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n.$

Symbol Newtona jest związany z trójkątem Pascala, którego fragment prezentujemy poniżej:

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Trójkąt Pascala to nieskończona trójkątna tablica liczb, w której element w wierszu n na pozycji k jest równy $\binom{n}{k}$, przy czym zarówno wiersze jak i elementy w wierszach numerujemy od 0. Zauważmy, że na bokach trójkąta znajdują się wyłącznie liczby 1, natomiast każda liczba w jego wnętrzu jest sumą dwóch liczb stojących po jej obu stronach w wierszu bezpośrednio powyżej. Obserwację ta obrazuje wzór:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad 0 < k < n.$$

Przykład 3.4. Porównajmy poniższe przykłady z przykładem 3.3 (str. 54):

1. element w wierszu nr 5 na pozycji nr 3 jest równy $\dbinom{5}{3} = 10$.
2. element w wierszu nr 6 na pozycji nr 4 jest równy $\dbinom{6}{4} = 15$.

Na zakończenie tego podrozdziału przedstawimy **dwumian Newtona**, czyli wzór opisujący wyrazy rozwinięcia potęg sumy dwóch liczb, prawdziwy dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\
&= \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \\
&\qquad + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1} + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n = \\
&= a^n + n a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + n a b^{n-1} + b^n.
\end{aligned}$$

Przykład 3.5. Korzystając z powyższego wzoru, możemy rozwinąć poniższe wyrażenia:

1. $(a+b)^2 = \dbinom{2}{0} a^{2-0} b^0 + \dbinom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \dbinom{2}{2} a^{2-2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$
2. $(a+b)^3 = \dbinom{3}{0} a^{3-0} b^0 + \dbinom{3}{1} a^{3-1} b^1 + \dbinom{3}{2} a^{3-2} b^2 + \dbinom{3}{3} a^{3-3} b^3 =$
$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$
3. $(a+b)^4 = \dbinom{4}{0} a^{4-0} b^0 + \dbinom{4}{1} a^{4-1} b^1 + \dbinom{4}{2} a^{4-2} b^2 + \dbinom{4}{3} a^{4-3} b^3 + \dbinom{4}{4} a^{4-4} b^4 =$
$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$

Zaważmy, że współczynniki występujące w powyższych wyrażeniach to kolejne elementy trójkąta Pascala (str. 54) odpowiednio w wierszach 2, 3 i 4.

3.2. Wariacje, permutacje i kombinacje

W tym podrozdziale omówimy po kolei podstawowe pojęcia służące do zliczania elementów zbiorów skończonych: wariacje, permutacje i kombinacje. Każde z tych pojęć występuje w dwóch wariantach: bez powtórzeń i z powtórzeniami. W rozważanych przykładach odpowiedzi mogą być dużymi liczbami, dlatego nie jest konieczne, aby podawać ostateczne wyniki w postaci konkretnych liczb, wystarczą odpowiednie wyrażenia.

Definicja 3.6. Wariacją k-elementową **bez powtórzeń** zbioru n-elementowego A, gdzie $k \leq n$, nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnowartościowy, którego wyrazami są elementy zbioru A.

Liczba wszystkich różnych k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, jest równa

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{3.1}$$

Przykład 3.7. Babcia ma 5 wnucząt i kupiła w sklepie 8 różnych czekolad. Na ile sposobów Babcia może obdarować dzieci słodyczami, jeśli każde dziecko ma otrzymać dokładnie 1 czekoladę?

Skoro Babcia rozdaje czekolady, zatem ich zbiór będzie naszym $A = \{c_1, c_2, \ldots, c_8\}$. Jeśli ustalimy pewną kolejność dzieci (np. od najmłodszego do najstarszego), przykładowy sposób obdarowania wnuczków przez Babcię może być następujący: pierwsze dziecko dostaje czekoladę c_3, drugie dostaje czekoladę c_1, trzecie otrzymuje czekoladę c_8, a czwarte i piąte zostają obdarowane odpowiednio czekoladami c_5 i c_7. Taki przydział możemy zapisać zwięźle w postaci ciągu: $(c_3, c_1, c_8, c_5, c_7)$ – jest to 5-wyrazowy ciąg różnowartościowy, którego wyrazami są elementy zbioru A. Zatem mamy tu $n = 8$ oraz $k = 5$. Zgodnie z wzorem (3.1) liczba takich wariacji bez powtórzeń wynosi

$$V_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 6\,720.$$

Do tego samego wyniku możemy dojść dzięki następującemu, elementarnemu rozumowaniu: wybierając czekoladę dla pierwszego wnuczka Babcia może dokonać wyboru spośród 8 różnych czekolad; przy drugim dziecku jej możliwość wyboru zmniejsza się już do 7 rodzajów, przy kolejnych dwóch wnuczkach Babcia może wybrać czekoladę odpowiednio na 6 i 5 sposobów, a ostatni wnuczek może otrzymać jedną z 4 pozostałych czekolad. Mnożąc przez siebie ilość możliwych wyborów w kolejnych krokach otrzymujemy liczbę wszystkich wariacji

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720.$$

Definicja 3.8. Wariacją k-elementową **z powtórzeniami** zbioru n-elementowego A nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy zbioru A.

Liczba wszystkich różnych k-elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego jest równa

$$\overline{V}_n^k = n^k, \quad \text{gdzie } n, k \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Przykład 3.9. Alicja ma do rozwiązania test złożony z 9 pytań. Pod każdym pytaniem może zakreślić jedną z 3 odpowiedzi (a, b lub c), lub też może pozostawić pytanie bez zakreślania odpowiedzi (bzo). Na ile sposobów Alicja może rozwiązać test?

Przy każdym pytaniu zbiór możliwych wyborów Alicji jest taki sam: będzie to nasz zbiór $A = \{a, b, c, bzo\}$. Przykładowo załóżmy, że Alicja na pytania 3, 5 i 8 udzieliła odpowiedzi a, na pytania 1 i 7 udzieliła odpowiedzi b, na pytania 4 i 9 udzieliła odpowiedzi c, natomiast pytania 2 i 6 pozostawiła bez odpowiedzi. Tak wypełniony test możemy opisać wariacją: $(b, bzo, a, c, a, bzo, b, a, c)$ – 9-wyrazowym ciągiem, którego wyrazami są elementy zbioru A. Zatem mamy tu $n = 4$ oraz $k = 9$, zaś liczba takich wariacji z powtórzeniami, zgodnie z wzorem (3.2, str. 56), wynosi

$$\overline{V}_4^9 = 4^9 = 262\,144.$$

Inny sposób rozwiązania tego zadania polega na zauważeniu, że na każde z dziewięciu pytań można udzielić odpowiedzi na 4 sposoby, a następnie na przemnożeniu liczby możliwości dla kolejnych pytań

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^9 = 262\,144.$$

Definicja 3.10. Permutacją bez powtórzeń zbioru n-elementowego A nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru, czyli każde uporządkowanie jego elementów.

Liczba wszystkich różnych permutacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego jest równa

$$P_n = n!, \quad \text{gdzie} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Przykład 3.11. W galerii przygotowywana jest wystawa malarstwa. Na pewnej ścianie należy zawiesić w rzędzie 8 wybranych już obrazów Picassa. Na ile sposobów można to zrobić?

W tym zadaniu zbiór A to zbiór obrazów: $A = \{o_1, o_2, \ldots, o_8\}$. Wieszając kolejno od lewej obrazy: $o_5, o_8, o_2, o_7, o_1, o_6, o_3, o_4$ otrzymujemy przykładową permutację bez powtórzeń: $(o_5, o_8, o_2, o_7, o_1, o_6, o_3, o_4)$, czyli 8-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są wszystkie elementy zbioru A. Ponieważ mamy $n = 8$, zatem liczba permutacji bez powtórzeń, zgodnie z wzorem (3.3), jest równa

$$P_8 = 8! = 40\,320.$$

Możemy także spojrzeć na ten problem w nieco inny sposób. Wystarczy zauważyć, że na pierwsze miejsce na ścianie możemy wybrać dowolny z 8 obrazów, następnie na drugie miejsce możemy wybrać jeden z 7 pozostałych obrazów, na trzecim miejscu możemy umieścić jeden z 6 niewybranych jeszcze obrazów, ..., na przedostatnie miejsce możemy wybrać jeden z dwóch obrazów, a na ostatnim miejscu wieszamy ostatni obraz. Mnożąc możliwości w kolejnych krokach otrzymujemy całkowitą liczbę permutacji

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40\,320.$$

Definicja 3.12. Permutacją n-elementową **z powtórzeniami** k-elementowego zbioru $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, w której element a_1 występuje n_1 razy, element a_2 występuje n_2 razy, ..., element a_k występuje n_k razy, gdzie $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg, w którym element a_i występuje n_i razy dla $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Występujące w powyższej definicji liczby n_i nazywamy krotnościami elementów a_i w permutacji z powtórzeniami. Liczba wszystkich różnych n-elementowych permutacji z powtórzeniami o krotnościach $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, jest równa

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}. \tag{3.4}$$

Przykład 3.13. Na ile sposobów można ułożyć w szeregu na sklepowej półce 4 soki pomarańczowe (p), 5 jabłkowych (j), 3 ananasowe (a) oraz 6 grejpfrutowych (g), zakładając, że soki o tym samym smaku są nierozróżnialne?

Przykładowe ustawienie soków może być takie: sok pomarańczowy stoi na pozycjach (licząc od lewej) 7, 8, 13 i 15, sok jabłkowy stoi na pozycjach 1, 5, 9, 14 i 17, sok ananasowy stoi na pozycjach 2, 4 i 10, zaś sok grejpfrutowy stoi na pozycjach 3, 6, 11, 12, 16 i 18. Możemy zapisać takie ustawienie w postaci ciągu $(j, a, g, a, j, g, p, p, j, a, g, g, p, j, p, g, j, g)$, którego wyrazy są elementami zbioru $A = \{p, j, a, g\}$ rodzajów soków. Ciąg ten ma 18 elementów, zaś elementy p, j, a i g występują w tym ciągu odpowiednio 4, 5, 3 i 6 razy. Liczba takich permutacji z powtórzeniami, zgodnie z wzorem (3.4), wynosi

$$P_{18}^{4,5,3,6} = \frac{18!}{4! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 6!} = 514\,594\,080.$$

Definicja 3.14. Kombinacją k-elementową **bez powtórzeń** zbioru n-elementowego A, $k \leq n$, nazywamy każdy podzbiór k-elementowy tego zbioru.

Liczba wszystkich różnych kombinacji k-elementowych bez powtórzeń zbioru n-elementowego jest równa

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{gdzie } k \leq n, \ n, k \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Przykład 3.15. Na przyjęciu było 14 znajomych. Ile wymieniono uścisków dłoni, jeśli każdy przywitał się z każdym?

Oznaczmy zbiór znajomych jako $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_{14}\}$. Każdy uścisk dłoni angażuje parę znajomych: na przykład, jeśli ręce podały sobie osoby z_6 i z_{11}, to mamy dwuelementową kombinację bez powtórzeń postaci $\{z_6, z_{11}\}$. Stąd $n = 14$ oraz $k = 2$, a zatem wzór (3.5) mówi nam, że liczba takich kombinacji bez powtórzeń jest równa

$$C_{14}^2 = \binom{14}{2} = \frac{14!}{2!(14-2)!} = \frac{14!}{2! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14}{2} = 91.$$

Przed kolejną definicją wprowadzimy nieformalnie pojęcie multizbioru, które można traktować jako uogólnienie pojęcia zbioru. W multizbiorach, podobnie jak w ciągach, elementy mogą występować więcej niż jeden raz, a dwa multizbiory uznajemy za równe, gdy krotności tych samych elementów są równe. Jednakże w odróżnieniu od ciągów, zaś podobnie jak to jest ze zbiorami, nie jest istotna kolejność w jakiej wypiszemy elementy multizbioru. Na przykład, multizbiory $\{a, a, b, c\}$ oraz $\{b, a, c, a\}$ uznajemy za identyczne, gdyż występują w nich te same elementy z tymi samymi krotnościami, zaś multizbiór $\{a, b, c\}$, będzie od nich różny, gdyż krotność elementu a w tym zbiorze jest inna.

Definicja 3.16. **Kombinacją** k-elementową **z powtórzeniami** zbioru n-elementowego $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ nazywamy każdy taki ciąg $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, że $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$, gdzie $k_i \in \mathbb{N}_0$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Zdefiniowaną powyżej kombinację z powtórzeniami możemy interpretować jako multizbiór zawierający k elementów, w którym element a_i występuje z krotnością k_i, dla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Liczba wszystkich różnych k-elementowych kombinacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego jest równa

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}, \quad \text{gdzie } n, k \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Przykład 3.17. Ile różnych zestawów zawierających po 7 balonów można utworzyć, mając do dyspozycji dowolną liczbę balonów czerwonych (c), zielonych (z) i niebieskich (n)? Zakładamy, że balony tego samego koloru są nierozróżnialne.

Przyjmijmy za $A = \{c, z, n\}$ zbiór kolorów balonów. Przykładowy zestaw może zawierać 2 balony czerwone, 3 balony zielone i 2 balony niebieskie, co daje nam 7-elementową kombinację z powtórzeniami zbioru kolorów balonów postaci $(2, 3, 2)$, a więc 3-wyrazowy ciąg, w którym $2 + 3 + 2 = 7$. Innym przykładem może być kombinacja $(4, 0, 3)$, czyli 3-wyrazowy ciąg, w którym $4 + 0 + 3 = 7$, który interpretujemy jako zestaw, w którym 4 balony są czerwone, 3 balony są niebieskie, natomiast nie ma balonów zielonych.

W zadaniu mamy więc $k = 7$ oraz $n = 3$, zatem wzór (3.6) mówi nam, że liczba takich kombinacji z powtórzeniami wynosi

$$\overline{C}_3^7 = \binom{3+7-1}{3-1} = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36.$$

3.3. Prawo mnożenia i prawo dodawania

W tym podrozdziale omówimy kolejne dwa narzędzia służące do zliczania elementów zbiorów skończonych: prawo mnożenia i prawo dodawania. Przypomnijmy, że pojęcie iloczynu kartezjańskiego zdefiniowaliśmy w podrozdziale 1.3 (definicja 1.19, str. 16).

Twierdzenie 3.18. (Prawo mnożenia) *Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są zbiorami skończonymi, to*

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|. \tag{3.7}$$

Przykład 3.19. Jeśli $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{a, b\}$, $A_3 = \{2, 3, b, c\}$, to

$$|A_1 \times A_2 \times A_3| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24.$$

Przykład 3.20. Emil postanowił zjeść w barze obiad złożony z zupy, drugiego dania, surówki i ciastka. Na ile sposobów Emil może skomponować swój posiłek, jeśli w barze ma do wyboru 2 różne zupy, 10 różnych drugich dań, 7 różnych surówek i 3 różne ciastka?

W tym zadaniu zbiór A_1 to zbiór zup, A_2 to zbiór drugich dań, A_3 to zbiór surówek, A_4 to zbiór ciastek, $n = 4$. Oznaczmy zbiór zup jako $A_1 = \{z_1, z_2\}$, zbiór drugich dań jako $A_2 = \{d_1, d_2, \ldots, d_{10}\}$, zbiór surówek jako $A_3 = \{s_1, s_2, \ldots, s_7\}$, zbiór ciastek jako $A_4 = \{c_1, c_2, c_3\}$. Przykładowy obiad Emila możemy opisać jako (z_2, d_5, s_4, c_3), co oznacza, że Emil wybrał zupę nr 2, drugie danie nr 5, surówkę nr 4 i ciastko nr 3. Korzystając z wzoru (3.7), str. 59, możemy obliczyć liczbę wszystkich możliwych różnych obiadów Emila:

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| = 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 3 = 420.$$

Twierdzenie 3.21. (Prawo dodawania) *Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są zbiorami skończonymi parami rozłącznymi, to znaczy $A_i \cap A_j = \varnothing$ dla $i \neq j$, to*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|. \tag{3.8}$$

Przykład 3.22. Dla zbiorów $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{5, 7\}$, $A_3 = \{4, 9\}$, mamy oczywiście $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \varnothing$, zatem możemy zastosować prawo dodawania, skąd

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 3 + 2 + 2 = 7.$$

Przykład 3.23. Ile można utworzyć komisji składających się z 4 osób wybranych spośród 9-osobowej grupy, jeśli dwie osoby z tej grupy, Agnieszka i Bogdan, nie chcą być w tej samej komisji?

Zauważmy, że każda komisja jest podzbiorem danej grupy osób. Stąd liczba wszystkich czteroosobowych komisji jest równa liczbie 4-elementowych kombinacji bez powtórzeń zbioru 9-elementowego, czyli $\binom{9}{4}$ (definicja 3.14 i wzór (3.5), str. 58). Jednakże nas interesuje liczba komisji spełniających dodatkowy warunek: nie mogą do nich zostać jednocześnie wybrani Agnieszka i Bogdan. Zauważmy, że wśród komisji spełniających ten warunek możemy wyróżnić trzy podzbiory:

- A_1 – zbiór komisji, do których należy Agnieszka i w których nie ma Bogdana,
- A_2 – zbiór komisji, do których należy Bogdan i w których nie ma Agnieszki,
- A_3 – zbiór komisji, w których nie ma ani Agnieszki, ani Bogdana.

Zbiory te są parami rozłączne, ponieważ dotyczą sytuacji, które nawzajem się wykluczają. Zauważmy, że:

$|A_1| = \binom{7}{3}$, ponieważ wybieramy 3 osoby (Agnieszka jest już wliczona do rozważanych komisji) spośród 7 osób (pomijamy Agnieszkę i Bogdana),

$|A_2| = \binom{7}{3}$, ponieważ wybieramy 3 osoby (Bogdan jest już wliczony do rozważanych komisji) spośród 7 osób (pomijamy Agnieszkę i Bogdana),

$|A_3| = \binom{7}{4}$, ponieważ wybieramy do każdej komisji 4 z 7 osób (pomijamy Agnieszkę i Bogdana).

Zatem stosując wzór (3.8), liczba wszystkich możliwych 4-osobowych komisji wybranych spośród grupy 9 osób, do których nie należą jednocześnie dwie ustalone osoby, jest równa

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \binom{7}{3} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} = 105.$$

3.4. Problemy różne

Podczas rozwiązywania zadań kombinatorycznych można spotkać wiele sytuacji, które nie dają się wpisać wprost w schematy zaprezentowane w podrozdziałach 3.2 i 3.3. Zwykle rozwiązywanie takich problemów wymaga pewnego doświadczenia (stąd tak wiele zadań w podrozdziale 3.6) oraz umiejętności w dobieraniu odpowiednich narzędzi. W tym podrozdziale przedstawimy na przykładach kilka praktycznych wskazówek, które mogą pomóc w rozwiązywaniu zadań kombinatorycznych, niekoniecznie standardowych.

Na początek zwróćmy uwagę na fakt, że podstawową kwestią jest należyte zrozumienie problemu, ponieważ jest nierzadko rozwiązanie zadania nie wymaga wykonywania żadnych obliczeń, a odpowiedź jest natychmiastowa!

Przykład 3.24. Na ile różnych sposobów można włożyć 6 różnych kartek świątecznych do 10 identycznych kopert? Do koperty wkładamy co najwyżej 1 kartkę, niektóre koperty mogą pozostać puste.

Ponieważ wszystkie koperty są identyczne, każde rozmieszczenie kartek w kopertach będzie nieodróżnialne od innych, zatem odpowiedź brzmi: jest tylko 1 sposób.

Przykład 3.25. Na ile sposobów można włożyć 9 identycznych zdjęć do 8 identycznych ramek? Każda ramka może zawierać co najwyżej 1 zdjęcie, żadne zdjęcie nie może zostać bez ramki.

Ponieważ zdjęć jest więcej niż ramek, nie można rozmieścić zdjęć w ramkach tak, by każda ramka zawierała co najwyżej 1 zdjęcie. Zatem odpowiedź brzmi: 0 sposobów.

W kolejnych dwóch przykładach przeanalizujemy cztery sytuacje, w których istotną rolę odgrywa kolejność.

Przykład 3.26. W klasie jest 27 osób: 15 dziewcząt i 12 chłopców. Na mikołajki klasa zorganizowała dla siebie loterię fantową z 27 losami, wśród których jest dokładnie 5 losów z nagrodami. Na ile sposobów można wybrać 3 uczennice i 2 uczniów, którzy wylosowali nagrody, jeżeli:

a) nagrody są identyczne?

Niech A_1 będzie rodziną 3-elementowych podzbiorów zbioru złożonego z 15 dziewcząt, zaś A_2 będzie rodziną 2-elementowych podzbiorów wybranych ze zbioru 12 chłopców. Elementy zbiorów A_1 i A_2 są kombinacjami bez powtórzeń, zatem mamy $|A_1| = \binom{15}{3}$, $|A_2| = \binom{12}{2}$ (definicja 3.14 i wzór (3.5), str. 58). Aby uzyskać końcową odpowiedź zauważmy, że każdą piątkę uczniów otrzymujących nagrodę możemy otrzymać łącząc dowolną trójkę dziewcząt ze zbioru A_1 z dowolną dwójką chłopców ze zbioru A_2. Mamy zatem do czynienia z przypadkiem prawa mnożenia (twierdzenie 3.18, str. 59), co oznacza, że ostateczna odpowiedź to: $|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2| = \binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2}$.

b) nagrody są parami różne?

Zgodnie z poprzednim punktem piątkę dzieci, które otrzymają nagrodę możemy wybrać na $\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2}$ sposobów. Zakładając, że nagrody są ponumerowane od 1 do 5, w grupie dzieci ze zwycięskimi losami również należy ustalić kolejność, tak by pierwszy uczeń otrzymał pierwszą nagrodę, drugi wygrał nagrodę nr 2, itd. Uporządkowanie zbioru to permutacja bez powtórzeń (definicja 3.10 i wzór (3.3), str. 57), a zatem możemy to zrobić na 5! sposobów. Otrzymujemy ostateczną odpowiedź: $\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot 5!$.

Przykład 3.27. Klasa składa się z 20 osób. Nauczycielka postanowiła zorganizować pracę w 5 grupach po 4 osoby każda. Na ile sposobów można dokonać podziału, jeżeli:

a) grupy są ponumerowane od 1 do 5?

W tym zadaniu mamy do czynienia z wyznaczaniem 5 kombinacji bez powtórzeń (definicja 3.14 i wzór (3.5), str. 58) jako kolejnych grup. Grupę nr 1 można wybrać na $\binom{20}{4}$ sposobów, grupę nr 2 można wybrać na $\binom{16}{4}$ sposobów, grupę nr 3 można wybrać na $\binom{12}{4}$ sposobów, grupę nr 4 można wybrać na $\binom{8}{4}$ sposobów, grupę nr 5 można wybrać na $\binom{4}{4}$ sposobów. W związku z powyższym odpowiedź brzmi $\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}$.

b) grupy nie są ponumerowane?

Zgodnie z powyższym liczba ponumerowanych grup jest równa $\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}$. Zauważmy, że dla każdego podziału klasy na 5 nienumerowanych grup po 4 osoby, możemy tym grupom przydzielić numery, czyli uporządkować grupy, na dokładnie 5! sposobów (permutacja bez powtórzeń, definicja 3.10 i wzór 3.3, str. 57). Zatem po usunięciu numeracji te 5! sposobów daje nam ten sam podział klasy na nienumerowane grupy. W związku z powyższym odpowiedź brzmi $\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} / 5!$.

Porównajmy ten przykład z przykładem 3.26 (str. 61). W podpunkcie 3.26a wybieramy dwa podzbiory: podzbiór 3 dziewcząt i podzbiór 2 chłopców, ale są to podzbiory dwóch różnych zbiorów – zbioru 15 dziewcząt i zbioru 12 chłopców. W podpunkcie 3.27a wybieramy kolejne 4-osobowe grupy, ale są to podzbiory tego samego zbioru 20 osób w klasie, dlatego w kolejnych krokach, przy wyborze osób do grup nr 2, 3, 4 i 5, zmniejsza się liczba osób spośród których wybieramy. W tego typu zadaniach zawsze należy zwracać szczególną uwagę na zbiory, z których wybieramy podzbiory.

Zauważmy, że w tym przykładzie możliwe są alternatywne rozwiązania. I tak, w podpunkcie a) możemy rozpoznać permutację z powtórzeniami: każdemu z $n = 20$ uczniów przyporządkowujemy numer jednej z $k = 5$ grup, przy czym żądamy, by numer każdej grupy pojawiał się 4 razy: $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 4$, co daje nam rezultat (definicja 3.12, wzór 3.4, str. 58): 20!/(4!4!4!4!4!). Dla podpunktu b) możemy przeprowadzić następującą konstrukcję. Pierwszy uczeń musi należeć do jakiejś grupy. Spośród pozostałych 19 uczniów wybieramy 3 pozostałych członków tej grupy na $\binom{19}{3}$ sposobów. Pierwszy z pozostałych uczniów należy do innej grupy, a spośród 15 nierozważanych jeszcze uczniów dobieramy 3 członków na $\binom{15}{3}$ sposobów. Kontynuując, w kolejnych grupach mamy $\binom{11}{3}$, $\binom{7}{3}$ i $\binom{3}{3} = 1$ możliwości wyboru. Ostatecznie podziału na nienumerowane grupy możemy dokonać na $\binom{19}{3} \cdot \binom{15}{3} \cdot \binom{11}{3} \cdot \binom{7}{3}$ sposobów. Zachęcamy czytelnika do sprawdzenia (w dowolny sposób), że wyniki te są równe wynikom uzyskanym wcześniej.

Kolejne cztery przykłady pokazują, jak istotna jest kolejność losowania oraz fakt, czy losowane obiekty są rozróżnialne.

Przykład 3.28. W pudełku jest 9 kul białych i 7 kul czarnych. Na ile sposobów można z tego pudełka wylosować bez zwracania 6 kul, wśród których będą 2 kule białe i 4 czarne? Zakładamy, że kule tego samego koloru są **nierozróżnialne**, a kolejność losowania jest **istotna**.

W tym zadaniu mamy do czynienia z przypadkiem permutacji z powtórzeniami (definicja 3.12 i wzór (3.4), str. 58). Zbiór $A = \{b, c\}$ to zbiór kolorów, $k = 2$, $n = 6$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4$. Zauważmy, że liczby 9 i 7 nie mają tutaj wpływu na odpowiedź, ponieważ losujemy 2 kule białe spośród 9 identycznych oraz 4 kule czarne spośród 7 identycznych. W związku z powyższym odpowiedź brzmi $\frac{6!}{2! \cdot 4!}$.

Przykład 3.29. W pudełku jest 9 kul białych i 7 kul czarnych. Na ile sposobów można z tego pudełka wylosować bez zwracania 6 kul, wśród których będą 2 kule białe i 4 czarne? Zakładamy, że kule tego samego koloru są **nierozróżnialne**, a kolejność losowania jest **nieistotna**.

Chcemy wybrać 2 kule białe z 9 dostępnych. Ponieważ kule są nierozróżnialne, mamy na to tylko 1 sposób. Podobnie w przypadku kul czarnych, ponieważ kule są nierozróżnialne, mamy tylko 1 sposób na wybranie 4 kul z 7 dostępnych. Ponieważ kolejność losowania również jest nieistotna, zatem jest tylko 1 sposób wylosowania takiego zestawu kul.

Przykład 3.30. W pudełku jest 9 kul białych i 7 kul czarnych. Na ile sposobów można z tego pudełka wylosować bez zwracania 6 kul, wśród których będą 2 kule białe i 4 czarne? Zakładamy, że kule tego samego koloru są **rozróżnialne**, lecz kolejność losowania jest **nieistotna**.

Zadanie to jest analogiczne do przykładu 3.26a (str. 61), a zatem odpowiedź to $\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{4}$.

Przykład 3.31. W pudełku jest 9 kul białych i 7 kul czarnych. Na ile sposobów można z tego pudełka wylosować bez zwracania 6 kul, wśród których będą 2 kule białe i 4 czarne? Zakładamy, że kule tego samego koloru są **rozróżnialne**, a kolejność losowania jest **istotna**.

Zadanie to jest analogiczne do przykładu 3.26b (str. 61), więc odpowiedź to $\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{4} \cdot 6!$.

Na koniec tego podrozdziału pokażemy na przykładach, że w niektórych zadaniach warto wpierw rozważyć warunek przeciwny do opisywanego w danym problemie.

Przykład 3.32. W pewnej grupie 10 osób jest Cezary i Daria. Ile jest sposobów ustawienia tych osób w szeregu, tak aby Cezary i Daria nie stali obok siebie?

Uporządkowanie zbioru to permutacja bez powtórzeń (definicja 3.10 i wzór (3.3), str. 57), stąd sposobów na ustawienie 10 osób w szeregu wynosi $10!$. Zastanówmy się, ile jest możliwych sytuacji, w których Cezary i Daria stoją obok siebie. Możemy założyć, że Cezary i Daria trzymają się za ręce i permutujemy taką parę z pozostałymi 8 osobami, co daje nam $9!$ możliwości. Zauważmy jeszcze, że Cezarego i Darię możemy ustawić w obrębie ich pary na 2 sposoby. Stąd jest $2 \cdot 9!$ możliwości na ustawienie 10 osób w szeregu, tak aby Cezary i Daria stali obok siebie. Jeśli interesuje nas sytuacja przeciwna, w której Cezary i Daria nie stoją obok siebie, wystarczy odjąć otrzymany wynik od wszystkich możliwości ustawienia całej grupy w szereg, czyli $10! - 2 \cdot 9!$.

Przykład 3.33. Rzucamy trzema sześciennymi kostkami do gry: żółtą, czerwoną i zieloną. Ile jest możliwych sytuacji, w których iloczyn liczby oczek wyrzuconych na kostkach jest podzielny przez 3?

Wynik rzutu trzema różnymi kostkami możemy traktować jako wariację z powtórzeniami (definicja 3.8 i wzór (3.2), str. 56). Tu zbiór $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oznacza możliwe wyniki rzutu jedną kostką. Ponieważ $n = 6$ oraz $k = 3$, zatem liczba wszystkich możliwości jest równa 6^3. Iloczyn jest podzielny przez 3, gdy dowolny składnik iloczynu dzieli się przez 3. Rozważmy warunek przeciwny: aby iloczyn liczby oczek na trzech kostkach nie był podzielny przez 3, wynik na każdej kostce nie może dzielić się przez 3, czyli musi należeć do zbioru $A' = \{1, 2, 4, 5\}$. Stąd liczba wszystkich rzutów trzema kostkami przy których iloczyn liczby oczek nie jest podzielny przez 3 jest równa 4^3 (ponownie wariacja z powtórzeniami, $n' = |A'| = 4$, $k' = 3$). Aby otrzymać liczbę możliwości kiedy iloczyn liczby oczek jest podzielny przez 3, wystarczy odjąć otrzymany wynik od liczby wszystkich możliwych wyników rzutu 3 kostkami: $6^3 - 4^3$.

3.5. Zasada włączania i wyłączania oraz zasada szufladkowa Dirichleta

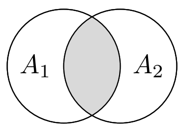
Na zakończenie tego rozdziału zaprezentujemy zasadę włączania i wyłączania oraz zasadę szufladkowa Dirichleta w najprostszej postaci. Przypomnijmy, iż jeśli chcemy policzyć liczbę elementów w sumie zbiorów parami rozłącznych, stosujemy prawo dodawania 3.21 (str. 60). Jeśli zbiory nie są parami rozłączne, potrzebujemy dodatkowego narzędzia.

Twierdzenie 3.34. (Zasada włączania i wyłączania) *Jeśli* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *są zbiorami skończonymi, to*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|. \quad (3.9)$$

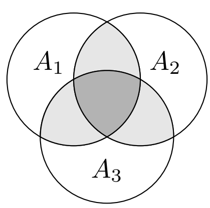
Wzór (3.9) jest skomplikowany. Aby zrozumieć, co się za nim kryje, rozważmy zasadę włączania i wyłączania dla dwóch zbiorów. Liczba elementów w zbiorze $A_1 \cup A_2$ jest zwykle mniejsza niż $|A_1| + |A_2|$, ponieważ elementy w części wspólnej $A_1 \cap A_2$ (szary obszar na rysunku poniżej) są policzone dwa razy. Aby uzyskać poprawny wynik, składnik $|A_1 \cap A_2|$ należy odjąć:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$



Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla trzech zbiorów. Liczba elementów w zbiorze $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ jest na ogół mniejsza niż suma $|A_1| + |A_2| + |A_3|$, ponieważ elementy w częściach wspólnych $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$, $A_2 \cap A_3$ (szare obszary na rysunku poniżej) są wliczone dwukrotnie. Zatem składniki $|A_1 \cap A_2|$, $|A_1 \cap A_3|$, $|A_2 \cap A_3|$ należy odjąć od $|A_1| + |A_2| + |A_3|$. Jednakże wówczas elementy w części wspólnej $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ (ciemnoszary obszar na rysunku poniżej) zostały w ten sposób całkowicie pominięte. Aby to naprawić, składnik $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ należy ponownie dodać:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$
$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \quad (3.10)$$



Przykład 3.35. W 30-osobowej klasie 20 osób uczy się języka angielskiego, 15 osób języka niemieckiego, a 10 osób języka francuskiego. Spośród nich 6 osób uczy się angielskiego i niemieckiego, 5 osób angielskiego i francuskiego, a 6 osób niemieckiego i francuskiego. Nie ma ucznia, który nie uczy się żadnego języka. Ile osób uczy się wszystkich trzech języków?

Oznaczmy przez A liczbę osób uczących się języka angielskiego, przez N liczbę osób uczących się języka niemieckiego, przez F liczbę osób uczących się języka francuskiego. Wtedy zgodnie ze wzorem (3.10, str. 64) otrzymujemy:

$$|A \cup N \cup F| = |A| + |N| + |F| - |A \cap N| - |A \cap F| - |N \cap F| + |A \cap N \cap F|,$$

skąd

$$\begin{aligned}|A \cap N \cap F| &= |A \cup N \cup F| - |A| - |N| - |F| + |A \cap N| + |A \cap F| + |N \cap F| = \\ &= 30 - 20 - 15 - 10 + 6 + 5 + 6 = 2,\end{aligned}$$

zatem wszystkich trzech języków uczą się 2 osoby.

Poniższe twierdzenie, choć tak proste w swej wypowiedzi, jest szeroko wykorzystywane w wielu dziedzinach matematyki.

Twierdzenie 3.36. (Zasada szufladkowa Dirichleta) *Jeśli zbiór $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$ liczy n elementów, gdzie $n > m$, to przynajmnej jeden zbiór A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ zawiera co najmniej 2 elementy.*

Nazwa powyższego twierdzenia nawiązuje do mniej formalnego, lecz równoważnego i bardziej obrazowego sformułowania tej zasady:

> Jeśli n obiektów jest rozmieszczonych w m szufladach oraz $n > m$, to pewna szuflada zawiera co najmniej 2 obiekty.

Z pomocą tego twierdzenia można na przykład uzasadnić, że w gronie 13 osób muszą być co najmniej dwie urodzone w tym samym miesiącu. W tym celu wystarczy wziąć 12 szuflad z nazwami miesięcy i „wkładać” do nich osoby, które urodziły się w danym miesiącu. Ponieważ osób jest mniej niż szuflad, to w pewnej szufladzie znajdą się 2 osoby (lub więcej), co oznacza, że urodziły się w tym samym miesiącu.

Przykład 3.37. Uzasadnij, że wśród dowolnych siedmiu różnych liczb całkowitych są dwie liczby, których suma lub różnica jest podzielna przez 10.

Niech szuflady mają etykiety:

$$\{0\}, \{5\}, \{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}.$$

Każdą z rozważanych siedmiu liczb umieszczamy w szufladzie z etykietą zawierającą resztę z dzielenia tej liczby przez 10; zauważmy, że liczby występujące w etykietach szuflad wyczerpują wszystkie możliwe reszty z dzielenia przez 10. Skoro szuflad jest 6, a liczb 7, więc zgodnie z twierdzeniem 3.36 co najmniej jedna z szuflad zawiera przynajmniej dwie liczby. Jeśli jest to szuflada z etykietą $\{0\}$ lub $\{5\}$, to liczby w tej szufladzie dają przy dzieleniu przez 10 resztę 0 lub 5, odpowiednio, więc zarówno ich suma jak i różnica jest liczbą podzielną przez 10. Etykiety pozostałych szuflad są postaci $\{k, 10 - k\}$, gdzie $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, i w przypadku, gdy to jedna z tych szuflad zawiera dwie liczby, musimy rozważyć dwa przypadki. W pierwszym przypadku, przy dzieleniu przez 10 obie liczby dają resztę k lub obie dają resztę $10 - k$. Wówczas ich różnica przy dzieleniu przez 10 da resztę 0, czyli będzie podzielna przez 10. W drugim przypadku, jedna z tych liczb ma postać $10i + k$, zaś druga $10j + 10 - k$, dla pewnych $i, j \in \mathbb{Z}$. Zatem ich suma ma postać $10i + k + 10j + 10 - k = 10(i + j + 1)$, więc jest liczbą podzielną przez 10.

3.6. Zadania

Wariacje bez powtórzeń

Zadanie 3.1. Babcia ma 5 wnucząt i kupiła w sklepie 8 różnych czekolad. Na ile sposobów Babcia może obdarować dzieci słodyczami, jeśli każde dziecko ma otrzymać dokładnie 1 czekoladę? (Przykład 3.7, str. 56.)

Zadanie 3.2. W kiosku mamy do wyboru 9 rodzajów widokówek (każda w co najmniej 4 egzemplarzach). Ile jest sposobów wysłania po 1 widokówce do 4 znajomych, tak aby każdy dostał inną widokówkę?

Zadanie 3.3. W pewnej fabryce postanowiono wprowadzić identyfikatory dla pracowników w niej zatrudnionych. Każdy identyfikator ma się składać z 4 różnych kolejno zapisanych liter ze zbioru $\{A, B, C, D, E, F\}$. Ile w ten sposób można utworzyć różnych identyfikatorów?

Zadanie 3.4. Typujemy 3 pierwsze miejsca w zawodach, w których udział bierze 10 sportowców. Ile mamy możliwości, uwzględniając kolejność na podium?

Zadanie 3.5. Rzucamy 3 razy kostką do gry. Ile jest możliwych wyników, w których w każdym rzucie wypadła inna liczba oczek?

Zadanie 3.6. Rzucamy 3 kostkami do gry: zieloną, czerwoną i niebieską. Ile jest możliwych wyników, w których na każdej z kostek wypadła inna liczba oczek?

Zadanie 3.7. Na ile sposobów można rozmieścić 5 różnych kwiatków w 8 różnych wazonach w taki sposób, że w każdym wazonie może znajdować się co najwyżej 1 kwiatek?

Zadanie 3.8. Na ile sposobów można posadzić 4 osoby na 10 krzesłach ustawionych w 1 rzędzie?

Zadanie 3.9. Na ile sposobów można ułożyć 7 różnych obrusów na 9 ponumerowanych stolikach?

Wariacje z powtórzeniami

Zadanie 3.10. Alicja ma do rozwiązania test złożony z 9 pytań. Pod każdym pytaniem może zakreślić jedną z 3 odpowiedzi, lub też może pozostawić pytanie bez zakreślania odpowiedzi. Na ile sposobów Alicja może rozwiązać test? (Przykład 3.9, str. 57.)

Zadanie 3.11. Ile jest różnych liczb 9-cyfrowych (cyfry mogą się powtarzać):

a) złożonych z cyfr $\{1, 2, \dots, 9\}$?

b) złożonych z cyfr $\{1, 2, \dots, 9\}$, które niezależnie od kierunku czytania przedstawiają tę samą liczbę?

Zadanie 3.12. Rzucamy 8 razy monetą otrzymując w wyniku ciąg reszek i orłów. Ile jest możliwych wyników?

Zadanie 3.13. Ile jest różnych sposobów pomalowania szachownicy złożonej z ponumerowanych 8 wierszy i 8 kolumn

a) dwoma kolorami, b) trzema kolorami,

jeśli zakładamy, że każde pole musi zostać pomalowane?

Zadanie 3.14. Ile jest różnych sposobów pomalowania szachownicy złożonej z ponumerowanych 8 wierszy i 8 kolumn

a) dwoma kolorami, b) trzema kolorami,

jeśli nie wszystkie pola muszą zostać pomalowane?

Zadanie 3.15. W kiosku mamy do wyboru 9 rodzajów widokówek (każda w co najmniej 4 egzemplarzach). Ile jest sposobów wysłania po 1 widokówce do 4 znajomych?

Zadanie 3.16. Jaka jest maksymalna liczba różnych znaków, które można utworzyć w alfabecie Braille'a? Znak składa się z co najmniej jednego i nie więcej niż sześciu wypukłych punktów ułożonych w trzy wiersze i dwie kolumny.

Zadanie 3.17. Uczestnik zakładów totalizatora piłkarskiego na jednym kuponie typuje wyniki 12 spotkań piłkarskich. Możliwe wyniki to: zwycięstwo gospodarzy, remis, zwycięstwo gości. Ile co najmniej kuponów należy wypełnić, aby mieć pewność uzyskania 12 trafień, czyli prawidłowego wytypowania wyników wszystkich 12 spotkań?

Zadanie 3.18. Cylindryczny zamek cyfrowy ma 4 współosiowe pierścienie, na każdym z nich znajduje się po 10 cyfr. Przy pewnym ustawieniu cyfr zamek można otworzyć. Ile prób trzeba podjąć w najbardziej niesprzyjającym przypadku, aby otworzyć zamek?

Zadanie 3.19. Każdy z 12 skazanych ma być osadzony w jednym z 7 zakładów karnych. Na ile sposobów można rozmieścić skazanych w tych zakładach?

Zadanie 3.20. Do domku na drzewie Krzysia prowadzą schody złożone z 8 stopni. Na ile sposobów Krzyś może pomalować schody mając do dyspozycji farby: seledynową, żółtą, pomarańczową, czerwoną i fioletową? Zakładamy, że jeden stopień ma być w całości pomalowany jednym kolorem.

Zadanie 3.21. Ile różnych sznurów złożonych z 11 korali można zbudować, mając do dyspozycji dowolną liczbę koralików czerwonych, białych, niebieskich i zielonych? Korale w tym samym kolorze są nierozróżnialne. Rozróżniamy prawy i lewy koniec sznurka.

Zadanie 3.22. Rzucamy 3 razy kostką do gry, zapisując liczbę oczek po każdym rzucie i otrzymując w wyniku ciąg trzech liczb.

a) Ile jest wszystkich możliwych wyników?

b) Ile jest wyników, w których w każdym rzucie wypadła liczba parzysta?

Zadanie 3.23. Rzucamy 3 kostkami do gry: zieloną, czerwoną i niebieską.

a) Ile jest wszystkich możliwych wyników?

b) Ile jest wyników, w których na każdej kostce wypadła liczba parzysta?

Zadanie 3.24. Ile jest wszystkich podzbiorów zbioru 17-elementowego? Porównaj to zadanie z przykładem 1.12 (str. 14).

Zadanie 3.25. Na kluczu jest wyżłobionych 9 rowków. Każdy z rowków ma głębokość od 0 mm do 7 mm ze skokową zmianą głębokości 1 mm. Ile różnych kluczy można wyprodukować?

Zadanie 3.26. Na ile sposobów można rozmieścić 20 różnych jabłek w 5 ponumerowanych skrzynkach, zakładając, że niektóre skrzynki mogą pozostać puste?

Permutacje bez powtórzeń

Zadanie 3.27. W galerii przygotowywana jest wystawa malarstwa. Na pewnej ścianie należy zawiesić w rzędzie 8 wybranych już obrazów Picassa. Na ile sposobów można to zrobić? (Przykład 3.11, str. 57.)

Zadanie 3.28. Ile jest różnych liczb 9-cyfrowych złożonych z cyfr: $1, 2, \ldots, 9$, w których żadna cyfra nie powtarza się?

Zadanie 3.29. Bartek ma 4 siostry. Na ile sposobów może wręczyć tulipana, słonecznika, lilię i goździka swoim siostrom, jeśli każda dziewczyna ma otrzymać dokładnie 1 kwiatka?

Zadanie 3.30. Na ile sposobów grupa złożona z 7 osób może się ustawić w kolejce do kasy biletowej?

Zadanie 3.31. Justyna ma w mieszkaniu 6 okien oraz kwiatki doniczkowe: fikusa, kaktusa, storczyka, paproć, bluszcz i fiołka. Na ile sposobów może rozstawić rośliny, jeśli na każdym parapecie ma stać dokładnie 1 kwiatek?

Zadanie 3.32. Na półce stoi obok siebie 5 różnych książek: kryminał, romans, horror, s.f. i fantasy. Na ile sposobów można ustawić wszystkie książki na półce?

Zadanie 3.33. Marian hoduje 7 kanarków oraz ma 7 różnych klatek. Na ile sposobów może rozmieścić ptaki w klatkach, jeśli w każdej klatce ma być dokładnie 1 kanarek?

Zadanie 3.34. Mamy zakupione 4 różne widokówki. Na ile sposobów można wysłać do każdego z 4 znajomych po 1 widokówce?

Zadanie 3.35. Ile jest takich różnych uporządkowań zbioru $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 6$, w których liczby 5 i 6 występują obok siebie w naturalnym porządku?

Permutacje z powtórzeniami

Zadanie 3.36. Na ile sposobów można ułożyć w szeregu na sklepowej półce 4 soki pomarańczowe, 5 jabłkowych, 3 ananasowe oraz 6 grejpfrutowych, zakładając, że soki o tym samym smaku są nierozróżnialne? (Przykład 3.13, str. 58.)

Zadanie 3.37. Ile różnych sznurów korali można utworzyć, tak aby każdy sznur zawierał 4 korale w kolorze czerwonym, 2 w kolorze białym, 3 w kolorze niebieskim i 2 w kolorze zielonym? Korale w tym samym kolorze są nierozróżnialne. Rozróżniamy prawy i lewy koniec sznurka.

Zadanie 3.38. Na ile sposobów można ułożyć w szeregu na półce w bibliotece 5 książek pt. „Potop", 3 książki pt. „Pan Wołodyjowski" oraz 6 książek pt. „Ogniem i mieczem"? Książki o tym samym tytule są nierozróżnialne.

Zadanie 3.39. W pudełku jest 9 kul białych i 7 kul czarnych. Na ile sposobów można z tego pudełka wylosować bez zwracania 6 kul, wśród których będą 2 kule białe i 4 czarne? Zakładamy, że kule tego samego koloru są nierozróżnialne, a kolejność losowania jest istotna. (Przykład 3.28, str. 62.)

Zadanie 3.40. W grze w „Skata” z 32 kart rozdaje się po 10 kart między 3 graczy, a 2 pozostałe karty kładzie się do skata (na stół). Ile jest różnych sposobów rozdania kart?

Zadanie 3.41. Ile różnych liczb 10-cyfrowych możemy utworzyć, jeśli mamy do dyspozycji zestaw cyfr: 5, 3, 3, 8, 8, 8, 2, 2, 2, 2?

Zadanie 3.42. Ile różnych „słów” można utworzyć wykorzystując wszystkie litery słowa:

a) ANANAS,

b) MATEMATYKA,

c) KOMBINATORYKA,

d) TOTOLOTEK.

Zadanie 3.43. Ile jest wszystkich możliwych sposobów pomalowania 10 kulek, z których każda jest innej wielkości, kolorami: niebieskim, czerwonym i zielonym, tak aby było 5 kulek niebieskich, 2 czerwone i 3 zielone?

Kombinacje bez powtórzeń

Zadanie 3.44. Na przyjęciu było 14 znajomych. Ile wymieniono uścisków dłoni, jeśli każdy przywitał się z każdym? (Przykład 3.15, str. 58.)

Zadanie 3.45. Na okręgu zaznaczono 15 różnych punktów. Ile różnych 9-kątów o wierzchołkach w tych punktach można narysować?

Zadanie 3.46. Gra liczbowa „Duży Lotek” polega na wytypowaniu 6 liczb losowanych spośród liczb od 1 do 49. Ile należy zakupić zakładów, aby mieć pewność głównej wygranej?

Zadanie 3.47. Komendant posterunku policji ma do dyspozycji 7 policjantów. Na ile sposobów komendant może spośród tych policjantów utworzyć 4-osobowy patrol?

Zadanie 3.48. Rzucamy 3 identycznymi kostkami do gry. Ile jest możliwych wyników, w których na każdej z kostek wypadła inna liczba oczek?

Zadanie 3.49. Na ile sposobów można ułożyć 7 identycznych obrusów na 9 ponumerowanych stolikach?

Zadanie 3.50. Typujemy 3 pierwsze miejsca w zawodach, w których udział bierze 10 sportowców. Ile mamy możliwości, nie biorąc pod uwagę kolejności na podium?

Zadanie 3.51. Pewna grupa studentów składa się z 20 mężczyzn i 15 kobiet. Na ile sposobów można wybrać podgrupę składającą się z 8 osób?

Zadanie 3.52. W zawodach bierze udział 33 zawodników, wśród których jest Krzysztof i Marcin. Zawodnicy startują trójkami. Na ile sposobów Krzysztof może dobrać sobie 2 kolegów do trójki?

Zadanie 3.53. Na turnieju szachowym było 30 uczestników. Ile rozegrano partii, jeśli każdy zagrał z każdym?

Zadanie 3.54. Na ile sposobów można rozmieścić 5 identycznych kwiatów w 8 różnych wazonach w taki sposób, że w każdym wazonie może znajdować się co najwyżej 1 kwiatek?

Kombinacje z powtórzeniami

Zadanie 3.55. Ile różnych zestawów zawierających po 7 balonów można utworzyć, mając do dyspozycji dowolną liczbę balonów czerwonych, zielonych i niebieskich? Zakładamy, że balony tego samego koloru są nierozróżnialne. (Przykład 3.17, str. 59.)

Zadanie 3.56. Ile różnych zestawów po 11 koralików można utworzyć, mając do dyspozycji dowolną liczbę koralików w kolorze czerwonym, białym, niebieskim i zielonym? Korale w tym samym kolorze są nierozróżnialne.

Zadanie 3.57. Ile różnych zestawów po 9 cukierków można utworzyć, mając do dyspozycji dowolną liczbę cukierków czekoladowych, miętowych, owocowych, orzechowych i jogurtowych? Cukierki tego samego smaku są nierozróżnialne.

Zadanie 3.58. Na ile sposobów można rozmieścić 20 identycznych jabłek w 5 ponumerowanych skrzynkach, zakładając, że niektóre skrzynki mogą pozostać puste?

Zadanie 3.59. Rzucamy 3 identycznymi kostkami do gry.

a) Ile jest możliwych wyników?

b) Ile jest wyników, w których na każdej kostce wypadła liczba parzysta?

Zadanie 3.60. Na ile sposobów można wybrać 10 piłek spośród nieograniczonej liczby czerwonych, niebieskich i zielonych, jeśli chcemy otrzymać co najmniej 4 piłki czerwone? Piłki tego samego koloru są nierozróżnialne.

Zadanie 3.61. Rzucamy 8 identycznymi monetami. Ile jest możliwych wyników?

Zadanie 3.62. Na ile sposobów można wybrać 5 owoców spośród 10 identycznych pomarańczy i 20 identycznych gruszek?

Prawo mnożenia

Zadanie 3.63. Emil postanowił zjeść w barze obiad złożony z zupy, drugiego dania, surówki i ciastka. Na ile sposobów Emil może skomponować swój posiłek, jeśli w barze ma do wyboru 2 różne zupy, 10 różnych drugich dań, 7 różnych surówek i 3 różne ciastka? (Przykład 3.20, str. 60.)

Zadanie 3.64. Oblicz, ile dzielników naturalnych mają liczby (porównaj z uwagą 2.14 na str. 41):

a) 24, b) 343, c) 25 725, d) 90 000.

Zadanie 3.65. Leon ma 3 dzieci w różnym wieku i każdemu z nich z osobna czyta wieczorem książkę przed snem. Najmłodsze dziecko ma 5 książek, średnie 7, a najstarsze 10. Na ile sposobów Tata może wybrać literaturę do czytania dzieciom na dzisiejszy wieczór?

Zadanie 3.66. U fryzjera siedzi 5 pań: szatynka (włosy brązowe), brunetka (włosy czarne), blondynka, ruda i siwa starsza pani. Fryzjer dysponuje farbami do włosów w następujących kolorach: brąz, czerń, blond i rudy. Na ile sposobów można pofarbować paniom włosy, jeśli chcą one zmienić swój kolor włosów?

Zadanie 3.67. Ile jest różnych liczb 9-cyfrowych złożonych z cyfr: $0, 1, 2, \ldots, 9$, jeśli cyfry mogą się powtarzać?

Zadanie 3.68. Z elementów zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tworzymy liczby 3-cyfrowe. Oblicz, ile liczb można utworzyć, tak aby były mniejsze od 500. Zakładamy, że cyfry mogą się powtarzać.

Zadanie 3.69. Mamy zakupione 4 różne widokówki kolorowe i 4 różne widokówki czarno-białe. Na ile sposobów można wysłać do każdego z 4 znajomych po 1 widokówce kolorowej i po 1 czarno-białej?

Zadanie 3.70. Justyna ma w mieszkaniu 6 okien oraz kwiatki: fikusa, kaktusa, storczyka, paproć, bluszcz i fiołka. Ma także 6 doniczek: zieloną, czerwoną, niebieską, żółtą, fioletową i pomarańczową. Na ile sposobów może wsadzić kwiatki do doniczek i je rozstawić, jeśli na każdym parapecie ma stać dokładnie 1 roślina?

Zadanie 3.71. Ile jest sposobów ustawienia 5 mężczyzn i 4 kobiet w szeregu, tak aby z obu stron każdej kobiety stali mężczyźni?

Zadanie 3.72. Oblicz, na ile sposobów można utworzyć numery rejestracyjne składające się z 2 liter ze zbioru $\{A, B, C, D, E\}$ i 6 dowolnych cyfr, jeśli:

a) litery i cyfry mogą się powtarzać,

b) ani litery, ani cyfry nie mogą się powtarzać,

c) litery mogą się powtarzać, ale cyfry nie mogą się powtarzać,

d) litery nie mogą się powtarzać, ale cyfry mogą się powtarzać.

Zadanie 3.73. W klasie jest 27 osób: 15 dziewcząt i 12 chłopców. Na ile sposobów można wybrać tak 3-osobową reprezentację klasy, aby była złożona z 2 dziewcząt i 1 chłopca?

Zadanie 3.74. W klasie jest 27 osób: 15 dziewcząt i 12 chłopców. Na mikołajki klasa zorganizowała dla siebie loterię fantową z 27 losami, wśród których jest dokładnie 5 losów z nagrodami. Na ile sposobów można wybrać 3 uczennice i 2 uczniów, którzy wylosowali nagrody, jeżeli nagrody są identyczne? (Przykład 3.26, str. 61.)

Zadanie 3.75. Pewna grupa studentów składa się z 20 mężczyzn i 15 kobiet. Na ile sposobów można wybrać podgrupę składającą się z 6 mężczyzn i 7 kobiet?

Zadanie 3.76. W pudełku jest 9 kul białych i 7 kul czarnych. Na ile sposobów można z tego pudełka wylosować bez zwracania 6 kul, wśród których będą 2 kule białe i 4 czarne? Zakładamy, że kule tego samego koloru są rozróżnialne, a kolejność losowania jest nieistotna. (Przykład 3.30, str. 63.)

Zadanie 3.77. Na pewnym czeskim uniwersytecie na pierwszym roku jest 60 studentów: 8 Polaków, 13 Hiszpanów oraz 17 Niemców, pozostałe osoby to Czesi. Na ile sposobów można wybrać tak reprezentację 5-osobową, aby znalazły się w niej po 1 osobie z Polski, Hiszpanii i Niemiec oraz 2 osoby z Czech?

Zadanie 3.78. W „Dużym Lotku" wylosowano 6 liczb spośród liczb od 1 do 49. Ile jest możliwych różnych zakładów, na których dokładnie 3 liczby zostały trafnie wytypowane?

Prawo dodawania

Zadanie 3.79. Ile można utworzyć komisji składających się z 4 osób wybranych spośród 9-osobowej grupy, jeśli dwie osoby z tej grupy, Agnieszka i Bogdan, nie chcą być w tej samej komisji? Wskazówka: rozważ 3 przypadki. (Przykład 3.23, str. 60.)

Zadanie 3.80. Pewna grupa studentów składa się z 20 mężczyzn i 15 kobiet. Na ile sposobów można wybrać podgrupę składającą się z 6 mężczyzn albo 7 kobiet? c

Zadanie 3.81. Rzucamy dwoma kostkami do gry: zieloną i czerwoną. Ile jest wyników, w których suma wyrzuconych oczek jest parzysta? Wskazówka: rozważ 6 przypadków.

Zadanie 3.82. Rzucamy jednocześnie kostkami: czarną i białą. Wyznacz liczbę rzutów, w których:

a) liczba oczek, które ukazały się na białej kostce jest mniejsza od liczby oczek, które wypadły na czarnej kostce (wskazówka: rozważ 6 przypadków),

b) liczba oczek, które ukazały się na czarnej kostce nie jest mniejsza od liczby oczek, które wypadły na białej kostce (wskazówka: rozważ 6 przypadków).

Zadanie 3.83. Ile jest sposobów ustawienia 10 osób w szeregu, tak aby Cezary i Daria stali obok siebie? Wskazówka: rozważ 2 przypadki.

Zadanie 3.84. W zawodach bierze udział 33 zawodników, wśród których jest Krzysztof i Marcin. Zawodnicy startują trójkami. Ile jest takich trójek, w których jest Krzysztof lub Marcin? Wskazówka: rozważ 3 przypadki.

Zadanie 3.85. W zawodach bierze udział 33 zawodników, wśród których jest Krzysztof i Marcin. Zawodnicy startują trójkami. Ile jest takich trójek, w których jest Krzysztof albo Marcin? Wskazówka: rozważ 2 przypadki.

Prawo mnożenia i prawo dodawania

Zadanie 3.86. Pewna grupa obcokrajowców składa się z 5 Hiszpanów, 6 Francuzów i 8 Włochów. Na ile sposobów można wybrać 2-osobową delegację z tej grupy, tak aby osoby wchodzące w skład delegacji nie były tej samej narodowości? Wskazówka: rozważ 3 przypadki.

Zadanie 3.87. Na ile różnych sposobów można wybrać trójkę różnych liczb spośród liczb: $1, 2, \ldots, 50$, tak aby ich suma była nieparzysta? Trójki różniące się jedynie kolejnością uznajemy za takie same. Wskazówka: rozważ 2 przypadki.

Zadanie 3.88. W „Dużym Lotku” wylosowano 6 liczb spośród liczb od 1 do 49. Ile jest możliwych różnych zakładów, na których co najmniej 3 liczby zostały trafnie wytypowane? Wskazówka: rozważ 4 przypadki.

Zadanie 3.89. Aby wybrać pieniądze z bankomatu, należy użyć karty i na 10-cyfrowej klawiaturze wybrać 4-cyfrowy kod PIN. Filip dawno nie korzystał ze swojej karty i nie pamięta dokładnie swojego kodu PIN, ale zapamiętał, że druga i trzecia cyfra jest nieparzysta, a suma dwóch skrajnych jest równa 5. Oblicz, ile co najwyżej razy Filip będzie musiał wpisać kod PIN, aby otrzymać gotówkę. Pamiętaj, że 0 jest cyfrą parzystą. Wskazówka: rozważ 6 przypadków.

Zadanie 3.90. Aby otworzyć neseser, należy ustawić prawidłowo 3 małe cylindry przy zamku. Na każdym cylindrze znajdują się cyfry od 0 do 9. Prezes Ireneusz był na długim urlopie i dawno nie otwierał nesesera, ale zapamiętał, że pierwsza i ostatnia cyfra jest parzysta, a środkowa jest liczbą pierwszą. Oblicz, ile ustawień cylindrów w najgorszym przypadku będzie musiał sprawdzić prezes, aby otworzyć neseser. Pamiętaj, że 0 jest cyfrą parzystą. Wskazówka: rozważ 4 przypadki.

Zadanie 3.91. Litery alfabetu Morse'a utworzone są z ciągu kropek i kresek, przy czym symbole te mogą się powtarzać. Ile liter można utworzyć, korzystając:

a) z dokładnie 4 symboli,

b) z co najwyżej 4 symboli,

c) z nie mniej niż 3 i nie więcej niż 6 symboli.

Zadanie 3.92. Każdemu znakowi alfanumerycznemu można przypisać ciąg złożony z cyfr 0 i 1. Jeżeli różnym znakom odpowiadają różne ciągi, to takie przyporządkowanie nazywamy kodem. Ile znaków można zakodować, używając ciągów o nie więcej niż ośmiu elementach?

Zadanie 3.93. Z grupy 18 uczniów, w której jest 9 chłopców i 9 dziewcząt, wybieramy niepusty podzbiór złożony z tej samej liczby dziewcząt i chłopców. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Zadania różne

Zadanie 3.94. Z elementów zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tworzymy liczby 3-cyfrowe. Oblicz, ile liczb można utworzyć, tak aby były mniejsze od 500 oraz miały 3 różne cyfry.

Zadanie 3.95. W przedziale pociągu znajduje się 8 ponumerowanych miejsc w dwóch naprzeciwległych rzędach po 4 miejsca. Do pustego przedziału weszło 5 osób: Anna, Beata, Cecylia, Darek i Edek. Panie zajęły miejsca w tym samym rzędzie, a panowie usiedli na miejscach w drugim rzędzie. Oblicz na ile sposobów osoby te mogły zająć miejsca, tak aby:

a) panie siedziały zwrócone twarzą w kierunku jazdy?

b) na przeciw każdego z panów siedziała pani?

Zadanie 3.96. Na ile sposobów można wybrać kolejno bez zwracania 2 karty z talii 52 kart, tak aby pierwszą kartą był as, a drugą nie była dama?

Zadanie 3.97. Na ile sposobów można wybrać kolejno bez zwracania 2 karty z talii 52 kart, tak aby pierwszą kartą była karta koloru karo, a drugą nie była dama? Wskazówka: rozważ 2 przypadki.

Zadanie 3.98. Ile jest takich liczb naturalnych 8-cyfrowych, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 12? Wskazówka: rozważ 3 przypadki.

Zadanie 3.99. W pewnej grupie 10 osób jest Cezary i Daria. Ile jest sposobów ustawienia tych osób w szeregu, tak aby Cezary i Daria nie stali obok siebie? Wskazówka: rozważ sytuację przeciwną? (Przykład 3.32, str. 63.)

Zadanie 3.100. Rzucamy trzema sześciennymi kostkami do gry: żółtą, czerwoną i zieloną. Ile jest możliwych sytuacji, w których iloczyn liczby oczek wyrzuconych na kostkach jest podzielny przez 3? Wskazówka: ile jest możliwych sytuacji, w których otrzymany iloczyn nie jest podzielny przez 3? (Przykład 3.33, str. 63.)

Zadanie 3.101. Pewnego zimowego wieczoru 9 znajomych wybrało się do kolegi Łukasza. Przy wejściu znajdował się pusty wieszak, gdzie każdy z nich zostawił swój płaszcz. Przy wychodzeniu znajomi wkładali płaszcze losowo. Ile jest takich sytuacji, w których co najmniej 1 z nich wrócił do domu w płaszczu, który nie należał do niego? Wskazówka: ile jest możliwych sytuacji, w których każdy ze znajomych wrócił do domu w swoim płaszczu?

Zadanie 3.102. W zawodach bierze udział 33 zawodników, wśród których jest Krzysztof i Marcin. Zawodnicy startują trójkami. Ile jest takich trójek, w których jest Krzysztof lub Marcin? Wskazówka: ile jest takich trójek, w których nie ma ani Krzysztofa, ani Marcina?

Zadanie 3.103. W ilu uporządkowaniach liter a, b, c, d, e, f, g nie pojawi się sylaba *cad*? Wskazówka: w ilu uporządkowaniach pojawi się sylaba *cad*?

Zadanie 3.104. Ile przekątnych można poprowadzić w ośmiokącie wypukłym? Wskazówka: ile jest boków w ośmiokącie wypukłym?

Zadanie 3.105. Ile jest liczb trzycyfrowych, które mają co najmniej jedną cyfrę mniejszą niż cyfry liczby 718? Wskazówka: ile jest takich liczb, które mają wszystkie cyfry większe lub równe cyfrom liczby 718?

Zadanie 3.106. Ile jest sposobów ustawienia 53 osób w szeregu, tak aby wybrane 12 osób stało obok siebie?

Zadanie 3.107. Na wycieczce we francuskim Disneylandzie jest grupa złożona z 30 dzieci: 5 Chińczyków, 3 Brazylijczyków, 7 Kanadyjczyków, pozostałe dzieci to Francuzi. Na ile sposobów można wszystkie dzieci ustawić w szereg, jeśli osoby z tego samego kraju mają stać obok siebie?

Zadanie 3.108. Ile jest możliwości umieszczenia 6 różnych koszul i 5 różnych swetrów w 4 różnych szufladach?

Zadanie 3.109. W kiosku mamy do wyboru 9 rodzajów widokówek (każda w co najmniej 4 egzemplarzach). Ile jest sposobów wysłania po 1 kartce do 4 znajomych, tak aby wszyscy dostali tę samą kartkę?

Zadanie 3.110. Na ile sposobów można rozdać 5 takich samych cukierków pięciorgu dzieciom?

Zadanie 3.111. Na ile sposobów można rozmieścić 5 różnych kwiatków w 8 identycznych wazonach w taki sposób, że w każdym wazonie może znajdować się co najwyżej 1 kwiatek?

Zadanie 3.112. Na ile sposobów można rozmieścić 5 identycznych kwiatków w 8 identycznych wazonach w taki sposób, że w każdym wazonie może znajdować się co najwyżej 1 kwiatek?

Zadanie 3.113. Babcia ma 5 wnucząt i kupiła w sklepie 8 identycznych czekolad. Na ile sposobów Babcia może obdarować dzieci słodyczami, jeśli każde dziecko ma otrzymać dokładnie 1 czekoladę?

Zadanie 3.114. Na ile różnych sposobów można włożyć 6 różnych kartek świątecznych do 10 identycznych kopert? Do koperty wkładamy co najwyżej 1 kartkę, niektóre koperty mogą pozostać puste. (Przykład 3.24, str. 61.)

Zadanie 3.115. Na ile sposobów można włożyć 9 identycznych zdjęć do 8 identycznych ramek? Każda ramka może zawierać co najwyżej 1 zdjęcie, żadne zdjęcie nie może zostać bez ramki. (Przykład 3.25, str. 61.)

Zadanie 3.116. W pudełku jest 9 kul białych i 7 kul czarnych. Na ile sposobów można z tego pudełka wylosować bez zwracania 6 kul, wśród których będą 2 kule białe i 4 czarne? Zakładamy, że kule tego samego koloru są nierozróżnialne, a kolejność losowania jest nieistotna. (Przykład 3.29, str. 63.)

Zadanie 3.117. Rzucamy 3 identycznymi kostkami do gry. Ile jest możliwych wyników, w których na każdej z kostek wypadła taka sama liczba oczek?

Zadanie 3.118. Bartek ma 4 siostry. Na ile sposobów może wręczyć 4 identyczne róże swoim siostrom, jeśli każda dziewczyna ma otrzymać dokładnie 1 kwiatka?

Zadanie 3.119. W klasie jest 27 osób: 15 dziewcząt i 12 chłopców. Na ile sposobów można wybrać 5-osobową reprezentację klasy, tak aby była złożona z dokładnie 2 dziewcząt i 1 chłopca?

Zadanie 3.120. Rozgrywka brydża rozpoczynana się od rozdania 52 kart klasycznej talii pośród 4 graczy, tak aby każdy otrzymał po 13 kart. Ile istnieje możliwości otrzymania przez ustalonego gracza wszystkich kart tego samego koloru?

Zadanie 3.121. Na ile sposobów można ułożyć 7 identycznych obrusów na 9 identycznych stolikach?

Zadanie 3.122. Na ile sposobów można ułożyć 7 różnych obrusów na 9 identycznych stolikach?

Zadanie 3.123. Z talii 52 kart losujemy x kart bez zwracania tak, żeby wśród nich były karty każdego koloru. Kolejność losowania jest nieistotna.

a) Na ile sposobów można to zrobić, jeśli $x = 5$?

b) Na ile sposobów można to zrobić, jeśli $x = 6$?

Zadanie 3.124. W pewnej miejscowości samochodowe tablice rejestracyjne zaczynają się od liter XY, po których jest 5 znaków: cyfry od 0 do 9 lub litery alfabetu łacińskiego od A do Z (26 liter).

a) Ile jest możliwych tablic rejestracyjnych, w których po XY są same cyfry, jeśli dodatkowo wiemy, że nie ma tablicy XY 00000?

b) Ile jest możliwych tablic rejestracyjnych, w których po XY są 2 litery, a następnie 3 cyfry?

Zadanie 3.125. Ze standardowej talii 52 kart do gry, losujemy bez zwracania 13 kart. Ile istnieje możliwych wyników losowania, w których wylosujemy dokładnie 1 asa, dokładnie 3 króle i dokładnie 2 damy? Kolejność w jakiej wylosowano karty jest nieistotna.

Zadanie 3.126. Na ile sposobów można utworzyć niepusty podzbiór owoców, mając do dyspozycji 13 identycznych bananów i 11 identycznych śliwek?

Zadanie 3.127. Oblicz, ile dzielników całkowitych mają liczby (porównaj z uwagą 2.14, str. 41):

a) 24, b) 343, c) 25 725, d) 90 000.

Zadanie 3.128. Ile liczb 5-cyfrowych większych od 20 000, ale mniejszych od 40 000, można utworzyć z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, jeśli:

a) żadna cyfra nie powtarza się,

b) wybór cyfr jest dowolny?

Zadanie 3.129. W pieszej wycieczce uczestniczy 8 dziewcząt i 7 chłopców, idąc gęsiego. Ile istnieje różnych sposobów ustawienia ich, jeżeli:

a) idą naprzemiennie: dziewczyna, chłopak, dziewczyna, ...,

b) ustawienie w kolumnie jest dowolne,

c) chłopcy idą razem w jednej grupie, dziewczęta także idą razem w jednej grupie.

Zadanie 3.130. W klasie jest 14 ponumerowanych 2-osobowych ławek. Na ile sposobów można rozmieścić 14 dziewcząt i 14 chłopców, tak aby:

a) w każdej ławce siedział chłopiec po lewej stronie i dziewczyna po prawej stronie,

b) w każdej ławce siedział chłopiec i dziewczyna.

Zadanie 3.131. Ile monogramów (dwuliterowych inicjałów) można utworzyć z liter alfabetu łacińskiego (26 liter), jeżeli:

a) litery w monogramie nie mogą się powtarzać,

b) litery w monogramie mogą się powtarzać,

c) litery w monogramie są takie same.

Zadanie 3.132. Do pustej windy stojącej na parterze wsiadło 6 pasażerów. Winda jedzie w górę, zatrzymując się na kolejnych 8 piętrach. Zakładamy, że wszyscy pasażerowie wysiądą z windy podczas tego przejazdu. Na ile sposobów pasażerowie mogą opuścić windę, jeśli:

a) nie zakładamy dodatkowych warunków?

b) żadnych dwóch pasażerów nie wysiądzie na tym samym piętrze?

Zadanie 3.133. Miasta X i Y łączy 6 dróg, a pomiędzy miastami Y i Z jest 8 dróg. Na ile sposobów można odbyć podróż

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow Y \longrightarrow X,$$

jeżeli:

a) żaden fragment trasy nie może się powtórzyć w trasie powrotnej,

b) dowolny fragment trasy może się powtórzyć w trasie powrotnej,

c) trzeba wracać tę samą trasą.

Zadanie 3.134. W klasie jest 27 osób: 15 dziewcząt i 12 chłopców. Na ile sposobów można wybrać tak trójkę klasową (przewodniczący, zastępca, skarbnik), aby była złożona z 2 dziewcząt i 1 chłopca?

Zadanie 3.135. W klasie jest 27 osób: 15 dziewcząt i 12 chłopców. Na mikołajki klasa zorganizowała dla siebie loterię fantową z 27 losami, wśród których jest dokładnie 5 losów z nagrodami. Na ile sposobów można wybrać 3 uczennice i 2 uczniów, którzy wylosowali nagrody, jeżeli nagrody są parami różne? (Przykład 3.26, str. 61.)

Zadanie 3.136. Na ile sposobów 6 obiektów można połączyć w pary?

Zadanie 3.137. W klasie jest 27 osób: 15 dziewcząt i 12 chłopców. Na ile sposobów można utworzyć 3 ponumerowane 9-osobowe zespoły, jeśli w każdym zespole ma być 5 dziewczyn i 4 chłopców?

Zadanie 3.138. Klasa składa się z 20 osób. Nauczycielka postanowiła zorganizować pracę w 5 grupach po 4 osoby każda. Na ile sposobów można dokonać podziału, jeżeli:

a) grupy są ponumerowane od 1 do 5?

b) grupy nie są ponumerowane?

(Przykład 3.27 str. 62.)

Zadanie 3.139. Na ile sposobów 10 osób może prowadzić jednocześnie 5 rozmów telefonicznych?

Zadanie 3.140. Na ile sposobów można rozmieścić 8 osób w 4 ponumerowanych pokojach 2-osobowych?

Zadanie 3.141. Na ile sposobów można rozmieścić 8 z 9 osób w 4 ponumerowanych pokojach 2-osobowych?

Zadanie 3.142. W pudełku jest 9 kul białych i 7 kul czarnych. Na ile sposobów można z tego pudełka wylosować bez zwracania 6 kul, wśród których będą 2 kule białe i 4 czarne? Zakładamy, że kule tego samego koloru są rozróżnialne, a kolejność losowania jest istotna. (Przykład 3.31, str. 63.)

Zadanie 3.143. Na ile sposobów można spośród 13 małżeństw wybrać 1 kobietę i mężczyznę, którzy

a) są małżeństwem?

b) nie są małżeństwem?

Zadanie 3.144. Ile liczb większych od 3 000 000 można utworzyć, jeśli mamy do dyspozycji cyfry: 1, 2, 2, 4, 6, 6, 6?

Zadanie 3.145. Rzucamy 3 razy kostką do gry. Ile jest możliwych wyników, w których pojawiły się dokładnie 2 różne liczby oczek?

Zadania trudniejsze

Zadanie 3.146. W klasie liczącej 25 osób trwa losowanie 5 biletów do teatru z numerami miejsc: 15, 16, 17, 18, 19, w ostatnim rzędzie. Wiemy, że bilety wygrali Waldek i Zenek, a pozostałych 3 zwycięzców jeszcze nie znamy. Ile istnieje wyników losowania, w których:

a) Waldek i Zenek będą siedzieli obok siebie,

b) Waldek i Zenek nie będą siedzieli obok siebie.

Zadanie 3.147. Na ile sposobów można rozmieścić oczka od 1 do 6 na sześciennej kostce do gry, jeśli:

a) wszystkie ściany kostki pomalowane są różnymi kolorami?

b) wszystkie ściany kostki mają ten sam kolor?

Zadanie 3.148. W powszechnie stosowanych sześciennych kostkach do gry oczka rozmieszczone są w taki sposób, że suma oczek na przeciwległych ścianach jest równa 7. Iloma sposobami można rozmieścić oczka od 1 do 6 na takiej kostce, jeśli:

a) wszystkie ściany kostki pomalowane są różnymi kolorami?

b) wszystkie ściany kostki mają ten sam kolor?

Zadanie 3.149. Na ile sposobów można posadzić 6 mężczyzn i 6 kobiet przy okrągłym stole z 12 miejscami w taki sposób, aby dwie osoby tej samej płci nie siedziały obok siebie?

Zadanie 3.150. Na ile sposobów można ustawić 2 króle (białego i czarnego) na szachownicy wielkości $m \times n$, $m, n \geq 3$, tak by nie stały na sąsiadujących polach? Za sąsiadujące uznajemy pola mające wspólny bok lub wierzchołek. Wskazówka: rozważ 3 przypadki.

Zadanie 3.151. Niech $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ oraz $B = \{1, 2, \ldots, n\}$, $k \leq n$. Niech $f\colon A \longrightarrow B$ będzie funkcją. Ile istnieje różnych

a) funkcji f?

b) funkcji f, które są silnie rosnące?

c) funkcji f, które są niemalejące?

d) funkcji f, które są różnowartościowe?

e) funkcji f, które są stałe?

3.7. Odpowiedzi

Odpowiedź 3.1. $\dfrac{8!}{(8-5)!} = \dfrac{8!}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

Odpowiedź 3.2. $\dfrac{9!}{(9-4)!} = \dfrac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

Odpowiedź 3.3. $\dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

Odpowiedź 3.4. $\dfrac{10!}{(10-3)!} = \dfrac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8$

Odpowiedź 3.5. $\dfrac{6!}{(6-3)!} = \dfrac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4$

Odpowiedź 3.6. $\frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4$

Odpowiedź 3.7. $\frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

Odpowiedź 3.8. $\frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

Odpowiedź 3.9. $\frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

Odpowiedź 3.10. 4^9

Odpowiedź 3.11.

a) 9^9,

b) 9^5.

Odpowiedź 3.12. 2^8

Odpowiedź 3.13.

a) 2^{64},

b) 3^{64}.

Odpowiedź 3.14.

a) 3^{64},

b) 4^{64}.

Odpowiedź 3.15. 9^4

Odpowiedź 3.16. $2^6 - 1$

Odpowiedź 3.17. 3^{12}

Odpowiedź 3.18. 10^4

Odpowiedź 3.19. 7^{12}

Odpowiedź 3.20. 5^8

Odpowiedź 3.21. 4^{11}

Odpowiedź 3.22.

a) 6^3,

b) 3^3.

Odpowiedź 3.23.

a) 6^3,

b) 3^3.

Odpowiedź 3.24. 2^{17}

Odpowiedź 3.25. 8^9

Odpowiedź 3.26. 5^{20}

Odpowiedź 3.27. $8!$

Odpowiedź 3.28. $9!$

Odpowiedź 3.29. $4!$

Odpowiedź 3.30. $7!$

Odpowiedź 3.31. $6!$

Odpowiedź 3.32. $5!$

Odpowiedź 3.33. $7!$

Odpowiedź 3.34. $4!$

Odpowiedź 3.35. $(n-1)!$

Odpowiedź 3.36. $\dfrac{18!}{4!\cdot 5!\cdot 3!\cdot 6!}$

Odpowiedź 3.37. $\dfrac{11!}{4!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 2!}$

Odpowiedź 3.38. $\dfrac{14!}{5!\cdot 3!\cdot 6!}$

Odpowiedź 3.39. $\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}$

Odpowiedź 3.40. $\dfrac{32!}{10!\cdot 10!\cdot 10!\cdot 2!}$

Odpowiedź 3.41. $\dfrac{10!}{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!}$

Odpowiedź 3.42.

a) $\dfrac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}$,

b) $\dfrac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}$,

c) $\dfrac{13!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}$,

d) $\dfrac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}$.

Odpowiedź 3.43. $\dfrac{10!}{5!\cdot 2!\cdot 3!}$

Odpowiedź 3.44. $\binom{14}{2}$

Odpowiedź 3.45. $\binom{15}{9}$

Odpowiedź 3.46. $\binom{49}{6}$

Odpowiedź 3.47. $\binom{7}{4}$

Odpowiedź 3.48. $\binom{6}{3}$

Odpowiedź 3.49. $\binom{9}{7}$

Odpowiedź 3.50. $\binom{10}{3}$

Odpowiedź 3.51. $\binom{20+15}{8} = \binom{35}{8}$

Odpowiedź 3.52. $\binom{33-1}{2}$

Odpowiedź 3.53. $\binom{30}{2}$

Odpowiedź 3.54. $\binom{8}{5}$

Odpowiedź 3.55. $\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7}$

Odpowiedź 3.56. $\binom{4+11-1}{11} = \binom{14}{11}$

Odpowiedź 3.57. $\binom{5+9-1}{9} = \binom{13}{9}$

Odpowiedź 3.58. $\binom{5+20-1}{20} = \binom{24}{20}$

Odpowiedź 3.59.

a) $\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3}$,

b) $\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3}$.

Odpowiedź 3.60. $\binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6}$

Odpowiedź 3.61. $\binom{2+8-1}{8} = \binom{9}{8}$

Odpowiedź 3.62. $\binom{2+5-1}{5} = \binom{6}{5} = 6$

Odpowiedź 3.63. $\binom{2}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{3}{1} = 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 3$

Odpowiedź 3.64.

a) $\binom{4}{1} \cdot \binom{2}{1} = 4 \cdot 2,$

b) $\binom{4}{1} = 4,$

c) $\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} = 2 \cdot 3 \cdot 4,$

d) $\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} = 5 \cdot 3 \cdot 5.$

Odpowiedź 3.65. $\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{10}{1} = 5 \cdot 7 \cdot 10$

Odpowiedź 3.66. $\binom{3}{1}^4 \cdot \binom{4}{1} = 3^4 \cdot 4$

Odpowiedź 3.67. $\binom{9}{1} \cdot \binom{10}{1}^8 = 9 \cdot 10^8$

Odpowiedź 3.68. $\binom{4}{1} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{7}{1} = 4 \cdot 7 \cdot 7$

Odpowiedź 3.69. $4! \cdot 4!$

Odpowiedź 3.70. $6! \cdot 6!$

Odpowiedź 3.71. $5! \cdot 4!$

Odpowiedź 3.72.

a) $5^2 \cdot 10^6,$

b) $\frac{5!}{(5-2)!} \cdot \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{5!}{3!} \cdot \frac{10!}{4!} = 5 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5,$

c) $5^2 \cdot \frac{10!}{(10-6)!} = 5^2 \cdot \frac{10!}{4!} = 5^2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5,$

d) $\frac{5!}{(5-2)!} \cdot 10^6 = \frac{5!}{3!} \cdot 10^6 = 5 \cdot 4 \cdot 10^6.$

Odpowiedź 3.73. $\binom{15}{2} \cdot \binom{12}{1} = \binom{15}{2} \cdot 12$

Odpowiedź 3.74. $\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2}$

Odpowiedź 3.75. $\binom{20}{6} \cdot \binom{15}{7}$

Odpowiedź 3.76. $\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{4}$

Odpowiedź 3.77. $\binom{8}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{17}{1} \cdot \binom{60-8-13-17}{2} = 8 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \binom{22}{2}$

Odpowiedź 3.78. $\binom{6}{3} \cdot \binom{49-6}{3} = \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}$

Odpowiedź 3.79. $\binom{7}{3} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4}$

Odpowiedź 3.80. $\binom{20}{6} + \binom{15}{7}$

Odpowiedź 3.81. $3+3+3+3+3+3 = 6 \cdot 3$

Odpowiedź 3.82.

a) $0+1+2+3+4+5$,

b) $1+2+3+4+5+6$.

Odpowiedź 3.83. $9! + 9! = 2 \cdot 9!$

Odpowiedź 3.84. $\binom{33-2}{2} + \binom{33-2}{2} + \binom{33-2}{1} = 2 \cdot \binom{31}{2} + 31$

Odpowiedź 3.85. $\binom{33-2}{2} + \binom{33-2}{2} = 2 \cdot \binom{31}{2}$

Odpowiedź 3.86. $\binom{5}{1} \cdot \binom{6}{1} + \binom{5}{1} \cdot \binom{8}{1} + \binom{6}{1} \cdot \binom{8}{1} = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 8$

Odpowiedź 3.87. $\binom{25}{3} + \binom{25}{1} \cdot \binom{25}{2} = \binom{25}{3} + 25 \cdot \binom{25}{2}$

Odpowiedź 3.88.

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{49-6}{3} + \binom{6}{4} \cdot \binom{49-6}{2} + \binom{6}{5} \cdot \binom{49-6}{1} + \binom{6}{6} \cdot \binom{49-6}{0} =$$

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} + \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} + \binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} + \binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0}$$

Odpowiedź 3.89. $5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 6 \cdot 5 \cdot 5$

Odpowiedź 3.90. $5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 4 \cdot 5 \cdot 5$

Odpowiedź 3.91.

a) 2^4,

b) $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$,

c) $2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$.

Odpowiedź 3.92. $\sum_{i=1}^{8} 2^i$

Odpowiedź 3.93. $\sum_{k=1}^{9} \binom{9}{k}^2$

Odpowiedź 3.94. $\binom{4}{1} \cdot \binom{7-1}{1} \cdot \binom{7-2}{1} = 4 \cdot 6 \cdot 5$

Odpowiedź 3.95.

a) $\frac{4!}{(4-3)!} \cdot \frac{4!}{(4-2)!} = (4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 3) =$

b) $\frac{4!}{(4-3)!} \cdot \frac{3!}{(3-2)!} + \frac{4!}{(4-3)!} \cdot \frac{3!}{(3-2)!} = (4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) + (4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2)$
$= 2 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2)$

Odpowiedź 3.96. $\binom{4}{1} \cdot \binom{52-1-4}{1} = 4 \cdot 47$

Odpowiedź 3.97. $1 \cdot \binom{52-4}{1} + \binom{13-1}{1} \cdot \binom{52-4-1}{1} = 48 + 12 \cdot 47$

Odpowiedź 3.98. $\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{1} + \binom{8}{1} \cdot \binom{7}{1} + \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{1} = 8 \cdot 7 + 8 \cdot 7 + \binom{8}{2} \cdot 6$

Odpowiedź 3.99. $10! - 2 \cdot 9!$

Odpowiedź 3.100. $6^3 - 4^3$

Odpowiedź 3.101. $9! - 1$

Odpowiedź 3.102. $\binom{33}{3} - \binom{33-2}{3} = \binom{33}{3} - \binom{31}{3}$

Odpowiedź 3.103. $7! - 5 \cdot 4! = 7! - 5!$

Odpowiedź 3.104. $\binom{8}{2} - 8$

Odpowiedź 3.105. $900 - 3 \cdot 9 \cdot 2$

Odpowiedź 3.106. $12! \cdot 42!$

Odpowiedź 3.107. $5! \cdot 3! \cdot 7! \cdot (30 - 5 - 3 - 7)! \cdot 4! = 5! \cdot 3! \cdot 7! \cdot 15! \cdot 4!$

Odpowiedź 3.108. $4^6 \cdot 4^5$

Odpowiedź 3.109. 9

Odpowiedź 3.110. 1

Odpowiedź 3.111. 1

Odpowiedź 3.112. 1

Odpowiedź 3.113. 1

Odpowiedź 3.114. 1

Odpowiedź 3.115. 0

Odpowiedź 3.116. 1

Odpowiedź 3.117. 6

Odpowiedź 3.118. 1

Odpowiedź 3.119. 0

Odpowiedź 3.120. 4

Odpowiedź 3.121. 1

Odpowiedź 3.122. 1

Odpowiedź 3.123.

a) $\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1}$,

b) $\binom{4}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} + \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1}$.

Odpowiedź 3.124.

a) $10^5 - 1$,

b) $26^2 \cdot 10^3$.

Odpowiedź 3.125. $\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{52-12}{7}$

Odpowiedź 3.126. $14 \cdot 12 - 1$

Odpowiedź 3.127.

a) $2 \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{2}{1} = 2 \cdot 4 \cdot 2$,

b) $2 \cdot \binom{4}{1} = 2 \cdot 4$,

c) $2 \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$,

d) $2 \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5$.

Odpowiedź 3.128.

a) $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 4!$,

b) $2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^4$.

Odpowiedź 3.129.

a) $8! \cdot 7!$,

b) $15!$,

c) $2 \cdot 8! \cdot 7!$.

Odpowiedź 3.130.

a) $14! \cdot 14!$,

b) $14! \cdot 14! \cdot 2^{14}$.

Odpowiedź 3.131.

a) $26 \cdot 25$,

b) 26^2,

c) 26.

Odpowiedź 3.132.

a) 8^6,

b) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.

Odpowiedź 3.133.

a) $6 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 7$,

b) $6 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 8$,

c) $6 \cdot 8$.

Odpowiedź 3.134. $\binom{15}{2} \cdot \binom{12}{1} \cdot 3! = \binom{15}{2} \cdot 12 \cdot 3!$

Odpowiedź 3.135. $\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot 5!$

Odpowiedź 3.136. $\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{3!} = 5 \cdot 3 \cdot 1$

Odpowiedź 3.137. $\binom{15}{5} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{5}{5} \cdot \binom{4}{4}$

Odpowiedź 3.138.

a) $\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}$,

b) $\frac{\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}}{5!} = \binom{19}{3} \cdot \binom{15}{3} \cdot \binom{11}{3} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{3}{3}$.

Odpowiedź 3.139. $\dfrac{\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}}{5!}=9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1$

Odpowiedź 3.140. $\dbinom{8}{2}\cdot\dbinom{8-2}{2}\cdot\dbinom{8-4}{2}\cdot\dbinom{8-6}{2}=\dbinom{8}{2}\cdot\dbinom{6}{2}\cdot\dbinom{4}{2}\cdot\dbinom{2}{2}$

Odpowiedź 3.141. $\dbinom{9}{2}\cdot\dbinom{9-2}{2}\cdot\dbinom{9-4}{2}\cdot\dbinom{9-6}{2}=\dbinom{9}{2}\cdot\dbinom{7}{2}\cdot\dbinom{5}{2}\cdot\dbinom{3}{2}$

Odpowiedź 3.142. $\dbinom{9}{2}\cdot\dbinom{7}{4}\cdot 6!$

Odpowiedź 3.143.

a) 13,

b) $13\cdot 12$.

Odpowiedź 3.144. $\dfrac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!}+\dfrac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!}$

Odpowiedź 3.145. $\dbinom{3}{2}\cdot 6\cdot 5.$

Odpowiedź 3.146.

a) $\dbinom{23}{3}\cdot 4!\cdot 2,$

b) $\dbinom{23}{3}\cdot 5!-\dbinom{23}{3}\cdot 4!\cdot 2.$

Odpowiedź 3.147.

a) $6!$,

b) $(1+4)\cdot 3!=5\cdot 3!$.

Odpowiedź 3.148.

a) $6\cdot 4\cdot 2=2^3\cdot 3!$,

b) 2.

Odpowiedź 3.149. $\dfrac{2\cdot 6!\cdot 6!}{2\cdot 6}=5!\cdot 6!$

Odpowiedź 3.150. $4(mn-4)+[2(m-2)+2(n-2)](mn-6)+(m-2)(n-2)(mn-9)$

Odpowiedź 3.151.

a) n^k,

b) $\dbinom{n}{k}$,

c) $\dbinom{n+k-1}{k}$,

d) $\dfrac{n!}{(n-k)!}$,

e) n.

Rozdział 4

Przykładowe pytania egzaminacyjne

Pytanie 4.1. Załóżmy, że zdanie $p \Rightarrow q$ jest fałszywe. Podaj wartości logiczne zdań:

a) $p \wedge q$, b) $p \vee q$, c) $q \Rightarrow p$.

Pytanie 4.2. Podaj dla jakich wartości $p_1, p_2, \ldots, p_n$ zdanie:

a) $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ ma wartość 1,

b) $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ ma wartość 0,

c) $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$ ma wartość 1,

d) $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$ ma wartość 0.

Pytanie 4.3. Wyprowadź prawo zaprzeczenia równoważności.

Pytanie 4.4. Niech $A, B \subseteq \Omega$. Wyznacz zbiory:

a) $A \cup (A \cap B)$, b) $A \cap (A \cup B)$, c) $A \cup A'$, d) $A \cap A'$.

Pytanie 4.5. Podaj przykład takich niepustych zbiorów A i B, że $A \times B = B \times A$.

Pytanie 4.6. Podaj przykład relacji, która:

a) jest symetryczna, ale nie jest antysymetryczna,

b) nie jest symetryczna, ale jest antysymetryczna,

c) nie jest symetryczna i nie jest antysymetryczna,

d) jest symetryczna i jest antysymetryczna.

Pytanie 4.7. Niech R będzie relacją symetryczną, ale nie zwrotną. Sprawdź, czy relacja R może być relacją przechodnią.

Pytanie 4.8. Wyznacz liczbę czynników w wyrażeniu $\prod_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=10}} a_{i,j}$.

Pytanie 4.9. Rozwiń poniższe wyrażenia:

a) $\sum_{k=1}^{3}\prod_{j=1}^{4} a_{k,j}$, c) $\sum_{k=1}^{3}\prod_{j=1}^{4}(a_k + b_j)$, e) $\sum_{k=1}^{3}\prod_{j=1}^{4}(a_k \cdot b_j)$,

b) $\prod_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} a_{k,j}$, d) $\prod_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(a_k + b_j)$, f) $\prod_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(a_k \cdot b_j)$.

Pytanie 4.10. Narysuj wykresy funkcji $f_1(x) = \lfloor x \rfloor$, $f_2(x) = \lceil x \rceil$, $f_3(x) = \langle x \rangle$.

Pytanie 4.11. Odpowiedz czy istnieje taka liczba $x \in \mathbb{R}$, że $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 2$.

Pytanie 4.12. Odpowiedz na poniższe pytania.

a) Czy suma/różnica/iloczyn dwóch liczb parzystych jest liczbą parzystą?

b) Czy suma/różnica/iloczyn dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą?

c) Czy suma/różnica/iloczyn dwóch liczb podzielnych przez $k \in \mathbb{N}$ jest liczbą podzielną przez k?

d) Czy suma/różnica/iloczyn dwóch liczb dających resztę r przy dzieleniu przez $k \in \mathbb{N}$ jest liczbą dającą resztę r przy dzieleniu przez k?

Pytanie 4.13. Odpowiedz na poniższe pytania. Rozważ wszystkie możliwości.

a) Czy suma/iloczyn 3 liczb parzystych jest liczbą parzystą?

b) Czy suma/iloczyn 3 liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą?

c) Czy suma/iloczyn 3 liczb podzielnych przez $k \in \mathbb{N}$ jest liczbą podzielną przez k?

d) Czy suma/iloczyn 3 liczb dających resztę r przy dzieleniu przez $k \in \mathbb{N}$ jest liczbą dającą resztę r przy dzieleniu przez k?

Pytanie 4.14. Sformułuj cechy podzielności dla liczb: 28, 39 i 42.

Pytanie 4.15. Opisz działanie Sita Eratostenesa.

Pytanie 4.16. Odpowiedz na poniższe pytania. Rozważ wszystkie możliwości.

a) Czy suma/różnica/iloczyn dwóch liczb pierwszych jest liczbą pierwszą?

b) Czy suma/różnica/iloczyn dwóch liczb złożonych jest liczbą złożoną?

Pytanie 4.17. Odpowiedz na poniższe pytania. Rozważ wszystkie możliwości.

a) Czy suma/iloczyn 3 liczb pierwszych jest liczbą pierwszą?

b) Czy suma/iloczyn 3 liczb złożonych jest liczbą złożoną?

Pytanie 4.18. Odpowiedz na pytania:

a) Czy każda liczba naturalna $n > 1$ ma dzielnik pierwszy?

b) Czy każda liczba naturalna $n > 1$ ma właściwy dzielnik pierwszy?

Pytanie 4.19. Dla ustalonych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

a) Jaka jest najmniejsza możliwa wartość $NWD(a_1, a_2, \ldots, a_k), k \in \mathbb{N}$?

b) Jaka jest największa możliwa wartość $NWD(a_1, a_2, \ldots, a_k), k \in \mathbb{N}$?

c) Jaka jest największa możliwa wartość $NWW(a_1, a_2, \ldots, a_k), k \in \mathbb{N}$?

d) Jaka jest najmniejsza możliwa wartość $NWW(a_1, a_2, \ldots, a_k), k \in \mathbb{N}$?

Pytanie 4.20. Rozważmy wzór:

$$NWD(a_1, a_2, a_3) \cdot NWW(a_1, a_2, a_3) = |a_1 \cdot a_2 \cdot a_3|.$$

a) Czy powyższy wzór jest prawdziwy dla dowolnych liczb $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}$?

b) Czy istnieją liczby $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}$, dla których powyższy wzór jest prawdziwy?

Pytanie 4.21. Uzasadnij dlaczego algorytm Euklidesa zakończy się po skończonej liczbie kroków.

Pytanie 4.22. Odpowiedz na pytania:

a) Jeśli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, to czy są parami względnie pierwsze?

b) Jeśli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ są parami względnie pierwsze, to czy są względnie pierwsze?

Pytanie 4.23. Podaj wartość funkcji Eulera dla liczby $p \in \mathbb{P}$.

Pytanie 4.24. Podaj wartość funkcji Eulera dla liczby $p \cdot q$, gdzie $p, q \in \mathbb{P}$.

Pytanie 4.25. Odpowiedz na pytania:

a) Jaki element znajduje się w wierszu 15 na pozycji 9 w trójkącie Pascala?

b) Jaki element znajduje się w wierszu 23 na pozycji 39 w trójkącie Pascala?

c) Ile wynosi suma elementów w odpowiednio 4, 5 i 6 wierszu trójkąta Pascala?

d) Jaki związek mają otrzymane sumy z liczbami 4, 5 i 6?

e) Czy pozostałe wiersze również mają tę cechę? Odpowiedź uzasadnij.

Pytanie 4.26. Rozwiń wyrażenie $(a \pm b)^6$.

Pytanie 4.27. Odpowiedz na pytania:

a) Rozważmy permutację n-elementową z powtórzeniami zbioru $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, w której liczba powtórzeń każdego elementu $a_i \in A$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, jest równa 1. Do czego redukuje się ta permutacja?

b) Rozważmy kombinację k-elementową bez powtórzeń zbioru n-elementowego, $k < n$, której elementy układamy w ciąg. Do czego redukuje się ta kombinacja?

c) Rozważmy wariację k-elementową bez powtórzeń zbioru n-elementowego, w której $k = n$. Do czego redukuje się ta wariacja?

d) Jak z punktu widzenia kombinatoryki możemy nazwać element iloczynu kartezjańskiego $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, gdzie $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$ są zbiorami skończonymi?

e) Rozważmy zasadę włączania i wyłączania dla zbiór skończonych parami rozłącznych. Do czego, w tej sytuacji, redukuje się ta zasada?

Pytanie 4.28. Oblicz ile jest osób w pewnej grupie, w której każdy śpiewa, maluje lub programuje. Śpiewaków jest 50, malarzy jest 45, a programistów jest 40. Ponadto 27 osób zarówno śpiewa jak i maluje, 14 osób śpiewa i programuje, a 24 osoby malują i programują. Wiadomo również, że wszystkie trzy umiejętności posiada osiem razy mniej osób niż liczy cała grupa.

Pytanie 4.29. Napisz zasadę włączania i wyłączania dla 4 zbiorów.

Pytanie 4.30. Uzasadnij, że w grupie 8 osób znajdują się co najmniej 2 osoby urodzone w tym samym dniu tygodnia.

Literatura

[1] Biegańska T., Górnicka A., *Matematyka dyskretna: zbiór zadań*, Wydawnictwo Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie, 2008.

[2] Graham R., Knuth D., Patashnik O., *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa, 1998.

[3] Grygiel J., *Wprowadzenie do matematyki dyskretnej*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2007.

[4] Grzymkowski R., *Matematyka dla studentów wyższych uczelni technicznych*, Wyd. Pracowni Komputerowej JS, Gliwice, 1999.

[5] Marek W., Onyszkiewicz J., *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, Warszawa, 1996.

[6] Narkiewicz W., *Teoria liczb*, PWN, Warszawa, 2003.

[7] Palka Z., Ruciński A., *Wykłady z kombinatoryki*, WNT, Warszawa, 1998.

[8] Ross K., Wright Ch., *Matematyka dyskretna*, PWN, Warszawa, 2005.

Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Jana Długosza w Częstochowie
42-200 Częstochowa, al. Armii Krajowej 36A
www.ujd.edu.pl
e-mail: wydawnictwo@ujd.edu.pl