PRACE NAUKOWE Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie
Seria: Filozofia 2012, z. IX

Joanna GRYGIEL

# Po co matematykom (i nie tylko) tolerancje[1]

W dowolnym zbiorze obiektów posiadających pewne cechy możemy mówić o podobieństwie. Obiekty są podobne, jeżeli posiadają przynajmniej jedną cechę wspólną. Na przykład powiemy, że dwa samochody są podobne, jeśli będą tej samej marki bądź tego samego koloru. Zauważmy, że ta relacja jest zwrotna, to znaczy przyjmujemy, że każdy obiekt jest podobny do samego siebie, a także jest symetryczna, co oznacza, że podobieństwo obiektu A do obiektu B implikuje podobieństwo obiektu B do obiektu A. Nie jest to jednak relacja przechodnia: to, że samochód A jest podobny do B (bo jest tej samej marki), a samochód B jest podobny do samochodu C (bo jest tego samego koloru), nie oznacza jakiegokolwiek podobieństwa pomiędzy samochodami A i C. Podobieństwo jest więc czymś słabszym od nierozróżnialności, aczkolwiek obiekty nierozróżnialne (np. identyczne samochody) są oczywiście podobne.

Nazwę „tolerancja" dla relacji dwuargumentowej posiadającej cechy zwrotności i symetryczności wprowadził w 1962 r. Zeeman[2], który, badając modele narządu wzroku, uznał za wygodne aksjomatyczne ujęcie podobieństwa. W następnych latach badania nad własnościami przestrzeni tolerancji podjęli z powodzeniem Jakubowicz[3], Szrejder[4] i Kalmar. Relacje tolerancji znalazły bogate zastosowanie w algebrze uniwersalnej jako naturalne uogólnienie pojęcia kongruencji. Wiele wyników dotyczących tej tematyki dostarczyli między innymi Chajda, Zelinka i Niederle[5].

---

[1] Praca przygotowana w ramach grantu NCN 2011/01/B/HS1/00944.

[2] E.C. Zeeman, *The topology of the brain and visual perception*, [w:] *Topology of 3-Manifolds andrelated topics*, ed. M.K. Fort, New York 1962.

[3] S.M. Jakubowicz, *Aksjomaticzeskaja tieorija schodstwa*, „Nauczno-tiechniczeskaja informacija, seria 2" 1968, nr 10, s. 15–19.

[4] J.A. Szrejder, *Prostranstwa tolerantnosti*, „Kibernetika" 1970, nr 2, s. 124–128.

[5] I. Chajda, J. Niederle, B. Zelinka, *On existence conditions for compatible tolerances*, „Czechoslovak Mathematical Journal" 1976, nr 26 (101), s. 304–311.

Arbid[6] i Dal Cin[7] użyli relacji tolerancji do opisu automatów z pewną inercją, co było wykorzystywane do rozwiązywania problemów sterowania optymalnego.

Tolerancje znalazły również swoje miejsce w lingwistyce, czym zajmowali się między innymi Pogonowski[8], Fischer[9] i Semeniuk[10].

Z formalnego punktu widzenia tolerancją w zbiorze $A$ nazywamy dowolną zwrotną i symetryczną dwuargumentową relację $\mathcal{R}$ określoną w tym zbiorze. Mówimy wtedy, że para $< A, \mathcal{R} >$ jest przestrzenią tolerancji. Oznacza to w szczególności, że każda relacja równoważności w zbiorze $A$ jest relacją tolerancji w tym zbiorze.

Załóżmy, że $< A, \mathcal{R} >$ jest przestrzenią tolerancji. Podzbiór $B \subseteq A$ nazywamy preklasą tolerancji $\mathcal{R}$, o ile każde dwa elementy zbioru $B$ są w relacji $\mathcal{R}$. Klasa (inaczej mówiąc – blok) relacji $\mathcal{R}$ to dowolna preklasa maksymalna. Innymi słowy, podzbiór $B$ zbioru $A$ jest klasą relacji tolerancji $\mathcal{R}$ (w skrócie $\mathcal{R}$ – klasą), jeżeli każde dwa elementy tego zbioru są ze sobą w relacji $\mathcal{R}$ oraz dla dowolnego elementu $a$ zbioru $A$ nie będącego w $B$ znajdziemy taki element zbioru $B$, który nie jest w relacji $\mathcal{R}$ z $a$. Przy użyciu lematu Kuratowskiego-Zorna można wykazać, że każda preklasa jest zawarta w pewnej klasie.

Tolerancja jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy jej klasy tolerancji są rozłączne. Oznacza to, że w ogólnym przypadku wybranie jednego przedstawiciela klasy nie determinuje wyboru klasy, jak to jest w przypadku relacji równoważności. Rodzina wszystkich klas danej tolerancji $\mathcal{R}$ (oznaczana $A / \mathcal{R}$) jest wygodnym narzędziem do opisu przestrzeni tolerancji $< A, \mathcal{R} >$. Rodzina ta może bowiem służyć jako prototypowa rodzina cech obiektów ze zbioru $A$, a przynależność do danej klasy może być traktowana jako pewna „cecha” obiektów zbioru $A$. W przypadku, gdy tolerancja nie jest relacją równoważności, mogą istnieć tzw. klasy pasożytnicze, nie wnoszące nic nowego do opisu tolerancji. Jako przykład takiej sytuacji rozważmy tak zwaną uniwersalną przestrzeń tolerancji $S_n$, to znaczy rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów $n$-elementowego zbioru $\{1, \ldots, n\}$, gdzie relacja tolerancji $\mathcal{R}$ jest określona jako

$$A \,\mathcal{R}\, B \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } A \cap B \neq \varnothing .$$

6 M. Arbid, *Tolerance automata*, „Kybernetika” 1967, nr 3, s. 223–233.

7 M. Dal Cin, *Fault-tolerance and stability of fuzzy-state automata*, [w:] *Fachtagung über Automatentheorie und Formale Sprachen. Bonn, 9–12 Juli 1973*, eds. H.-K. Böhling, K. Indermark, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1973, s. 36–44.

8 J. Pogonowski, *Tolerance spaces with applications to linguistics*, UAM, Poznań 1981.

9 W.L. Fischer, *Äquivalenz- und Toleranzstrukturen in der Linguistik*, Max Hueber Verlag, Munchen 1973.

10 M. Semeniuk, *Omonimia i tolerantnost*, „Nauczno-tiechniczeskaja informacija, seria 2” 1969, s. 11–33.

W przestrzeni $S_3$ każdy ze zbiorów $A_k = \{A \in S_3 : k \in A\}$, dla $k=1, 2, 3$ jest klasą tolerancji. Co więcej, łatwo zauważyć, że zbiory wyczerpują cały zbiór $S_3$. Okazuje się jednak, że klasą tolerancji tej relacji tolerancji jest również zbiór $\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$. Taką właśnie „niepotrzebną" klasę tolerancji nazywamy klasą pasożytniczą.

Wprowadza się pojęcie bazy przestrzeni tolerancji $< A,\mathcal{R} >$, czyli minimalnej rodziny klas $\mathcal{B}$ takiej, że elementy $x$ i $y$ są w relacji $\mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy w rodzinie $\mathcal{B}$ istnieje klasa zawierająca oba te elementy. Baza może więc być właściwą podrodziną rodziny wszystkich klas tolerancji. Można wykazać, że w każdej przestrzeni tolerancji istnieje baza. Przestrzeń tolerancji może więc zostać scharakteryzowana przez podanie bazy.

Do opisu tolerancji wygodnie jest również używać pojęcia pokrycia zbioru. Pokryciem zbioru $A$ nazywamy dowolną rodzinę zbiorów, w sumie których zbiór $A$ się zawiera. Elementy pokrycia nie muszą być rozłączne, jak to jest w przypadku podziału zbioru. Oczywiście z każdą przestrzenią tolerancji związane jest pokrycie, którego elementami są klasy tolerancji. Elementy dowolnej bazy tolerancji także tworzą pokrycie związanej z nią przestrzeni tolerancji. Z drugiej strony, jeśli $\mathcal{P}$ jest dowolnym pokryciem zbioru $A$, to indukuje w naturalny sposób przestrzeń tolerancji $< A,\mathcal{R} >$, gdzie elementy $a,b \in A$ są w relacji $\mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tego samego elementu pokrycia. Pokrycie nazywa się kanonicznym, gdy każdy jego element jest klasą tolerancji indukowanej przez to pokrycie.

Każda przestrzeń tolerancji $< A,\mathcal{R} >$ może być także reprezentowana przez pewien kontekst formalny, to znaczy układ $(A,\mathcal{P},I)$, gdzie $A$ i $\mathcal{P}$ są zbiorami, zwanymi odpowiednio zbiorem obiektów i zbiorem atrybutów, a $I$ jest relacją dwuargumentową pomiędzy elementami zbioru $A$ i elementami zbioru $\mathcal{P}$. W tym przypadku zbiorem obiektów jest po prostu zbiór $A$, zbiorem atrybutów jest pokrycie $\mathcal{P}$ zbioru $A$ wyznaczone przez tolerancję $\mathcal{R}$, a $I$ jest relacją należenia. Kontekst formalny związany z przestrzenią tolerancji może być interpretowany w ten sposób, że $\mathcal{P}$ jest zespołem cech przysługujących atrybutom ze zbioru A, a relację $aIp$ rozumiemy w ten sposób, że atrybutowi $a$ przysługuje cecha $p$.

Z drugiej strony, każdy kontekst formalny wyznacza pewną przestrzeń tolerancji. Jeżeli $(A,\mathcal{P},I)$ jest kontekstem formalnym, to możemy przyjąć, że obiekty $a$ i $b$ są ze sobą w relacji tolerancji $\mathcal{R}$, o ile mają przynajmniej jeden wspólny atrybut, to znaczy

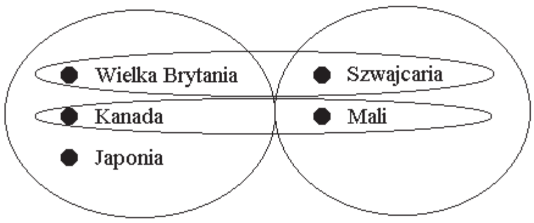
$$a\mathcal{R}b \iff (a,p),(b,p) \in I \text{ dla pewnego } p \in P.$$

Rozważmy kontekst formalny reprezentowany przez następującą tabelkę:

| | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| Wielka Brytania | X | X | | | X |
| Szwajcaria | | X | X | | |
| Kanada | X | | | X | |
| Japonia | X | | | | X |
| Mali | | | X | X | |

gdzie:
a) ma dostęp do morza
b) leży w Europie
c) ma prezydenta
d) powierzchnia tego kraju jest większa od powierzchni Polski
e) jest krajem wyspiarskim.

Klasy relacji tolerancji wyznaczonej przez ten kontekst formalny ilustruje następujący schemat:




Z każdą relacją tolerancji w zbiorze $A$ związane są pewne indukowane przez nią relacje równoważności, aproksymujące tę tolerancję. Taką „dolną" aproksymacją tolerancji $\mathcal{R}$ jest stowarzyszona z nią relacja $\mathcal{R}^+$ określona przez

$$x\,\mathcal{R}^+ y \Leftrightarrow \{z \in A;\ x\mathcal{R}\,z\} = \{z \in A;\ y\mathcal{R}\,z\}.$$

Inaczej mówiąc, elementy $x$ i $y$ są w relacji $\mathcal{R}^+$ wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tych samych klas tolerancji $\mathcal{R}$.

„Górną" aproksymacją tolerancji $\mathcal{R}$ jest jej tranzytywne domknięcie $\mathcal{R}^*$. Oczywiście, jeśli $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności, to $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R} = \mathcal{R}^*$. Jeśli tranzytywne domknięcie tolerancji $\mathcal{R}$ jest relacją totalną, to znaczy istnieje tylko jedna klasa abstrakcji relacji równoważności $\mathcal{R}^*$, to tolerancję $\mathcal{R}$ nazywamy sklejoną (bądź spójną). Takie tolerancje odgrywają szczególną rolę w pewnych aplikacjach algebraicznych.

Matematycy okazali się bardziej wymagający w stosunku do tolerancji – w strukturach algebraicznych relacje tolerancji nie są rozumiane jako zwykłe relacje zwrotne i symetryczne, oczekuje się ponadto, aby były one zgodne z bazowymi operacjami danej struktury. Oznacza to, że relacje tolerancji są w tym przypadku naturalnym uogólnieniem kongruencji.

I tak na przykład w strukturze kratowej $\langle A, \wedge, \vee \rangle$, zawierającej dwie operacje dwuargumentowe (identyfikowane z kresami dolnymi i górnymi w kracie jako zbiorze częściowo uporządkowanym), tolerancją jest każda relacja zwrotna i symetryczna $\mathcal{R}$ o tej własności, że o ile $a\mathcal{R}b$ i $c\mathcal{R}d$ to $(a \wedge c)\mathcal{R}(b \wedge d)$ oraz $(a \vee c)\mathcal{R}(b \vee d)$.

Można wykazać, że skutkuje to faktem, iż $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a \wedge b)\mathcal{R}(a \vee b)$, co oznacza, że każda relacja tolerancji w kracie jest wyznaczona przez zbiór zawartych w niej par $(a,b)$ takich, że $a \leq b$.

Tolerancje kratowe znalazły zastosowanie między innymi do badań nad funkcjami wielomianowymi w kratach (Kindermann[11]) oraz do znajdowania podkrat wypukłych maksymalnych ze względu na pewne użyteczne własności, w tym do rozkładu krat modularnych i dystrybutywnych (Herrmann, Day[12], Wille[13]).

W przypadku tolerancji kratowych nie ma „klas pasożytniczych", tzn. zbiór wszystkich klas dowolnej tolerancji stanowi jedyną bazę przestrzeni tolerancji. Wynika to z faktu, że każda klasa tolerancji w kracie jest jej podkratą wypukłą, a ponadto same klasy dowolnej tolerancji kratowej tworzą kratę. Fakt ten został udowodniony przez Czedliego[14].

Spośród wszystkich tolerancji kratowych szczególnie interesującymi własnościami (obok kongruencji) wyróżniają się sklejone relacje tolerancji. Herrmann i Day wykazali, że w przypadku krat modularnych o skończonej wysokości klasami najmniejszej sklejonej tolerancji, tak zwanej tolerancji szkieletowej, są maksymalne przedziały komplementarne danej kraty. Dla krat dystrybutywnych oznacza to, że tolerancja szkieletowa dekomponuje kratę na jej maksymalne przedziały boole'owskie, co okazało się wygodnym narzędziem do opisu i badania takich krat.

Dla każdej kraty $\mathcal{L}$ można rozważać nie tylko kratę klas tolerancji dla ustalonej tolerancji tej kraty, ale także kratę wszystkich tolerancji tej kraty. Bandelt[15] wykazał, że krata tolerancji dowolnej kraty jest 0-modularna, algebraiczna oraz pseudokomplementarna. W szczególności krata tolerancji dowolnej kraty dystrybutywnej jest kratą dystrybutywną.

Ogólnie rzecz biorąc, można wykazać, że wszystkie tolerancje danej struktury algebraicznej, podobnie jak to jest w przypadku kongruencji tej struktury,

---

[11] M. Kindermann, *Über die Äquivalenz von Ordnungspolynomvollständigkeit und Toleranzeinfachheit endlicher Verbände*, „Contributions to General Algebra" 1979, nr 2, s. 145–149.

[12] A. Day, Ch. Herrmann, *Gluings of modular lattices*, „Order" 1988, nr 5, s. 85–101.

[13] R. Wille, *Complete tolerance relations of Concept Lattices*, „Contributions to General Algebra" 1983, nr 3, s. 397–415.

[14] G. Czedli, *Factor lattices by tolerances*, „Acta Scientificarum Mathematicarum" 1982, nr 44, s. 35–42.

[15] H.J. Bandelt, *Tolerance relations of lattices*, „Bulletin of the Australian Mathematical Society" 1981, nr 23, s. 367–381.

tworzą kratą algebraiczną. Nie zawsze jednak krata kongruencji danej struktury algebraicznej jest podkratą kraty tolerancji tej struktury. W przeciwieństwie jednak do struktury kratowej, w ogólnym przypadku nie udało się znaleźć żadnych dalszych ogólnych własności krat tolerancji. Charakteryzowanie struktur i badanie ich własności przy użyciu krat tolerancji jest obecnie szybko rozwijającym się kierunkiem. Badania w tym nurcie rozpoczęte przez Chajdę i Zelinkę[16] były prowadzone także przez Daya, Hermanna, Czedliego, Grätzera[17], Radeleczkiego[18], Grygiel[19] i wielu innych.

Relacje tolerancji (w swoim podstawowym sensie) były także szeroko wykorzystywane w lingwistyce. Wynika to z faktu, że podobieństwo jest cechą częściej występującą niż tożsamość. Przy ustalaniu bliskości znaczeniowej wyrazów lub zwrotów interesujące są nie tyle przypadki pełnej tożsamości znaczeń, ile przypadki podobieństwa znaczeń. Przez podobieństwo znaczeń rozumiemy, że zbiór pewnych wspólnych znaczeń jest dostatecznie duży.

W lingwistyce używano relacji tolerancji do opisu m.in. synonimii (co robili Fischer i Pogonowski[20]) oraz homonimii (Semeniuk).

Szczególnymi przypadkami tolerancji w strukturach lingwistycznych są hiponimia oraz podobieństwo syntagmatyczne.

Relacja hiponimii może być charakteryzowana przez zawieranie się zakresów wyrażeń lub podrzędność treści wyrażeń. Przyjmuje się, że dwa leksemy są hiponimicznie podobne, jeśli posiadają co najmniej jedną wspólną cechę semantyczną.

Relacja podobieństwa syntagmatycznego na danym poziome językowym może być scharakteryzowana w następujący sposób: dwa segmenty są w tej relacji, jeśli posiadają taki sam (z dokładnością do izomorfizmu) fragment.

Wspomniane pojęcia podobieństwa strukturalnego mogą mieć także zastosowanie pozalingwistyczne, na przykład w ontologiach sytuacji, gdy sytuacje są reprezentowane przez pewne struktury relacyjne.

[16] I. Chajda, B. Zelinka, *Lattices of tolerances*, „Casopis pro pestovani matematiky" 1977, nr 102, s. 10–24.

[17] G. Czédli, G. Grätzer, *Lattice tolerances and congruences*, „Algebra Universalis" 2011, nr 66, s. 5–6.

[18] S. Radeleczki, D. Schweigert, *Lattices with complemented tolerance lattices*, „Czechoslovak Mathematical Journal" 2004, nr 54 (129), s. 407–412.

[19] J. Grygiel, *The concept of gluing for lattices*, Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Częstochowie, Częstochowa 2004.

[20] J. Pogonowski, *Przestrzenie tolerancji i opozycji*, [w:] *Skłonność metafizyczna. Bogusławowi Wolniewiczowi w darze*, red. M. Omyła, Warszawa 1997.

## Streszczenie

Pojęcie tolerancji jest naturalnym uogólnieniem pojęcia relacji równoważności i ma na celu pewną formalizację idei podobieństwa. W pracy omawiamy pokrótce pewne ważne zastosowania relacji tolerancji, głównie związane z matematyką i lingwistyką.

**Słowa kluczowe:** podobieństwo, relacja tolerancji, klasa tolerancji, przestrzeń tolerancji.

## Summary

### What do Mathematicians (among Others) Need Tolerances for?

The notion of tolerance relation is designed to formalize the idea of similarity. In the paper we present in short how the notion is used in mathematics, especially for investigating mathematical structures. Some linguistic applications are also mentioned.

**Key words:** similarity, tolerance relation, tolerance class, space of a tolerance.