Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka V, Częstochowa 1997

Zanurzenia algebr Heytinga w przestrzenie topologiczne

Tomasz Połacik

Jak wiadomo, rodzina zbiorów otwartych $\mathcal{O}(X)$ dowolnej przestrzeni topologicznej X tworzy algebrę Heytinga, której zerem jest zbiór pusty a operacje określa się w następujący sposób: dla dowolnych $A, B \in \mathcal{O}(X)$, $A \vee B = A \cup B, A \wedge B = A \cap B, A \to B = \text{int}\,((X \setminus A) \cup B)$. Wiadomo ponadto, iż każda algebra Heytinga jest izomorficzna z tak określoną algebrą zbiorów otwartych pewnej przestrzeni topologicznej.

Mając więc daną algebrę Heytinga $\mathcal{A}$ i przestrzeń topologiczną X możemy rozważać homomorfizmy algebry $\mathcal{A}$ w algebrę $\mathcal{O}(X)$ — lub krótko: w przestrzeń X. Oczywiście, ponieważ własności algebry $\mathcal{O}(X)$ zależą zazwyczaj od własności topologicznych przestrzeni X, charakter topologii przestrzeni X przesądza zazwyczaj o cechach zanurzalnych w nią algebr Heytinga. Fakt ten stanowi punkt wyjścia do postawienia następującego problemu:

> *Dana jest klasa algebr Heytinga* K *oraz przestrzeń topologiczna* X. *Jakie warunki spełniać musi przestrzeń* X, *aby były w nią zanurzalne algebry klasy* K*?*

Dzięki rezultatom M.C.C. McKinsey'a i A. Tarskiego, wiadomo, iż dla dowolnej skończonej algebry Heytinga $\mathcal{A}$ i dowolnej przestrzeni metrycznej w sobie gęstej X istnieje podprzestrzeń otwarta X_0 przestrzeni X, taka że algebra $\mathcal{A}$ jest zanurzalna w podprzestrzeń X_0. Jednakże, gdy przestrzeń X nie jest przestrzenią całkowicie niespójną, nie zawsze można przyjąć $X_0 = X$, czyli nie zawsze istnieje zanurzenie algebry $\mathcal{A}$ w (całą) przestrzeń X. Fakt ten nie pozwala więc (poza klasą przestrzeni całkowicie niespójnych) na udzielenie odpowiedzi na postawiony problem w przypadku klasy skończonych algebr. Z drugiej strony wskazuje on, iż zanurzalność wszystkich skończnych algebr ma związek z silnymi własnościami topologicznymi.

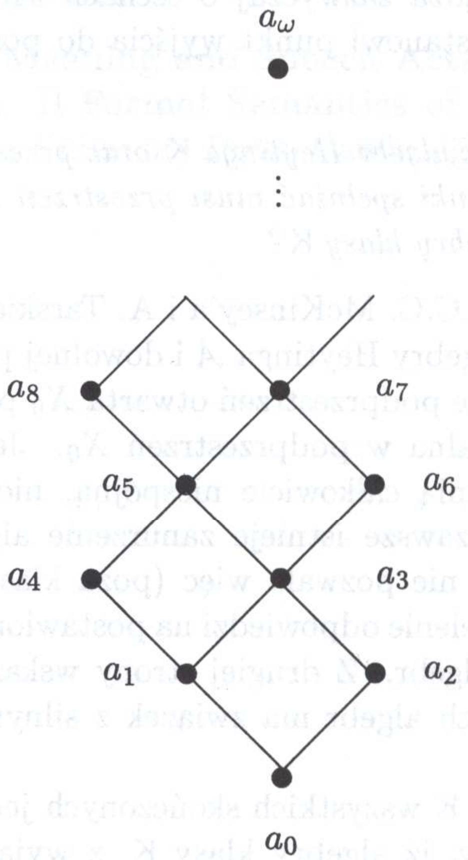
Rozważmy klasę K wszystkich skończonych jednogenerowanych algebr Heytinga. Pokażemy, iż algebry klasy K, z wyjątkiem algebry cztero– i sześcioelementowej, zanurzalne są w dowolną przestrzeń metryczną w sobie gęstą. Pokażemy również, że gdy algebra $\mathcal{A}$ klasy K jest algebrą silnie zwartą, różną od algebry pięcio– i siedmioelementowej, i $\star$ jest jej największym elementem różnym od elementu największego, to zanurzenie może być wybrane tak, by obrazem $\star$ był dowolny, z góry zadany podzbiór otwarty i gęsty przestrzeni X (własność tę mogą mieć tylko otwarte i gęste podzbiory przestrzeni).

Algebry klasy K możemy opisać odwołując się do tak zwanej algebry Riegera–Nishimury, będącej wolną jedno–generowaną algebrą Heytinga.

Przypomnijmy, iż elementy algebry Riegera–Nishimury $\mathcal{R}$ zdefiniować możemy następująco:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0,\\
a_1 &\ \text{(generator)},\\
a_2 &= a_1 \to 0,\\
a_{2n+1} &= a_{2n} \vee a_{2n-1},\\
a_{2n+2} &= a_{2n} \to a_{2n-1},\\
a_\omega &= a_1 \to a_1,
\end{aligned}
$$

gdzie $n \geq 1$; przypomnijmy również diagram algebry $\mathcal{R}$:



Dla każdego $n \geq 1$ rozważmy algebrę ilorazową $\mathcal{R}_n$

$$\mathcal{R}_n = \mathcal{R}/[a_n),$$

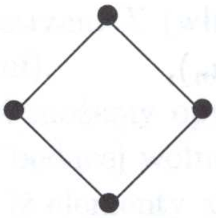
gdzie $[a_n)$ oznacza filtr generowany przez element a_n. Ponieważ każdy filtr w $\mathcal{R}$ jest filtrem głównym, każda skończona jednogenerowana algebra jest izomorficzna z algebrą $\mathcal{R}_n$ dla pewnego n. Zatem w rozważaniach naszych ograniczyć się wystarczy do algebr postaci $\mathcal{R}_n$.

Zauważmy, iż elementy a_{2n} są elementami $\vee$–nierozkładalnymi algebry $\mathcal{R}$ oraz, dla każdego $n \geq 2$, algebra $\mathcal{R}_{2n}$ jest silnie zwarta. Zatem algebry $\mathcal{R}_{2n}$ (dla $n \geq 2$) składają się na klasę wszystkich jedno–generowanych skończonych algebr Heytinga silnie zwartych.

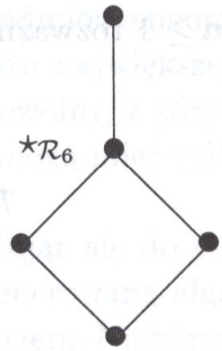
Odnotujmy przy tym, że algebra $\mathcal{R}_{2n-3}$ jest zanurzalna w przestrzeń topologiczną X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm φ algebry $\mathcal{R}_{2n}$ w X, taki że $\varphi(\star_{2n}) = X$ oraz $\varphi(a) \neq X$ dla każdego elementu a algebry $\mathcal{R}_{2n}$ różnego od $\star$ i elementu największego. Wystarczy więc rozpatrzeć homomorfizmy algebr silnie zwartych w przestrzenie topologiczne uwzględniając przy tym, jakie elementy przestrzeni topologicznej mogą być obrazami elementów $\star$.

Przypadek algebr dwuelementowych $\mathcal{R}_1$i $\mathcal{R}_2$ oraz trójelementowej algebry silnie zwartej $\mathcal{R}_4$ jest trywialny. Są one, oczywiście, zanurzalne w dowolną przestrzeń topologiczną. Zauważmy, ponadto iż dla dowolnego $n \geq 3, n \neq 4$, dowolnej przestrzeni topologicznej X i dowolnego homomorfizmu φ algebry $\mathcal{R}$ w X, zbiór $\varphi(a_n)$ jest zbiorem otwartym i gęstym w X. A zatem obrazem elementu $\star$ nietrywialnej algebry silnie zwartej może być wyłącznie pewien otwarty i gęsty podzbiór przestrzeni X. W sposób naturalny nasuwa się pytanie, czy każdy otwarty i gęsty podzbiór danej przestrzeni topologicznej może mieć tę własność. Nietrudno zauważyć, iż w przypadku algebry $\mathcal{R}_4$ odpowiedź jest pozytywna.

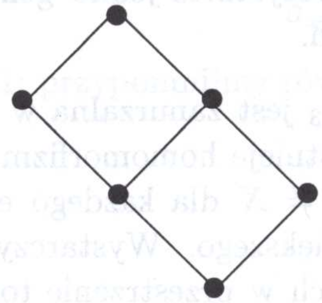
Okazuje się, iż istotną rolę dogrywają w naszych rozważaniach następujące algebry:



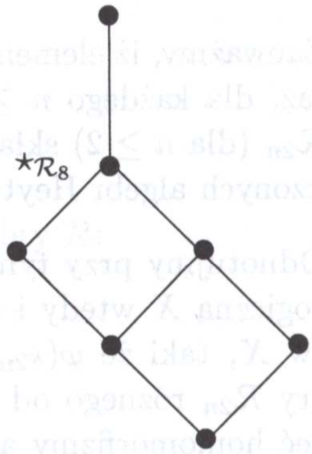
$\mathcal{R}_3$



$\mathcal{R}_6$



$\mathcal{R}_5$



$\mathcal{R}_8$

W odróżnieniu od rozpatrywanych dotąd przypadków, zanurzalność algebr $\mathcal{R}_3$ i $\mathcal{R}_6$ wymaga dodatkowych założeń o własnościach topologicznych przestrzeni. Można udowodnić, że algebra $\mathcal{R}_6$ jest zanurzalna w przestrzeń X wtedy i tylko wtedy, gdy w X istnieje zbiór otwarty i gęsty P będący sumą dwóch rozłącznych, niepustych zbiorów regularnie otwartych. Jedynie taki zbiór może bowiem być obrazem (poprzez postulowane zanurzenie) elementu $\star_6$. Ponadto, wynika stąd, iż algebra $\mathcal{R}_3$ jest zanurzalna w X wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń X jest niespójna.

Nietrudno jest zauważyć, iż w dowolnej przestrzeni metrycznej istnieje zbiór otwarty i gęsty będący sumą dwóch rozłącznych zbiorów regularnie otwartych. Nasuwa się jednak pytanie, czy każdy otwarty i gęsty podzbiór takiej przestrzeni ma tę własność. Okazuje się, że —generalnie— odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Ponadto, przykładów dostarczaja nam podzbiory tak naturalnych przestrzeni topologicznych, jak domknięte w sobie gęste podprzestrzenie prostej rzeczywistej czy przestrzenie $\mathbb{R}^n$ dla $n > 1$ (z naturalną topologią). Z drugiej strony jednak okazuje się, że każdy otwarty i gęsty podzbiór przestrzeni Cantora oraz prostej rzeczywistej jest sumą dwóch rozłącznych zbiorów regularnie otwartych. Algebrę $\mathcal{R}_6$ można więc zanurzyć w dowolną przestrzeń metryczną w sobie gęstą oraz, ponadto, w przypadku prostej rzeczywistej (i każdej otwartej podprzestrzeni prostej) oraz przestrzeni Cantora, dla każdego otwartego i gęstego podzbioru P zanurzenie takie można wybrać tak, by P był obrazem elementu $\star_6$.

Rozważmy zanurzalność algebr $\mathcal{R}_5$ i $\mathcal{R}_8$. Okazuje się, iż jeżeli algebra $\mathcal{R}_8$ jest zanurzalna w przestrzeń X, to obrazem elementu $\star_8$ musi być pewnie otwarty i gęsty podzbiór przestrzeni X będący sumą dwóch rozłącznych zbiorów regularnie otwartych. A zatem, algebra $\mathcal{R}_8$ jest zanurzalna w dowolną przestrzeń metryczną w sobie gęstą. Ponadto, algebra $\mathcal{R}_5$ jest zanurzalna w X wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń X jest, dodatkowo, niespójna.

Dotychczasowe rozważania mogą nasuwać przypuszczenie, że zanurzalność poszczególnych algebr rozważanej przez nas klasy wymagać może coraz to innych własności topologicznych. Nieoczekiwanie okazuje się jednak, że problem ten rozwiązuje się jednolicie dla przestrzeni metrycznch w sobie gęstych i wszystkich pozostałych algebr klasy K. Dokładniej, dla każdego $n \geq 5$ algebra $\mathcal{R}_{2n}$ jest zanurzalna w dowolną przestrzeń metryczną w sobie gęstą X. Co więcej, okazuje się, iż dla każdego zbioru otwartego i gęstego P przestrzeni metrycznej w sobie gęstej X istnieje zanurzenie φ algebry $\mathcal{R}_{2n}$ w X, takie że $\varphi(\star_{2n}) = P$. Wynika stąd, że w dowolną przestrzeń metryczną w sobie gęstą zanurzają się wszystkie algebry $\mathcal{R}_{2n-3}$, dla dowolnego $n \geq 5$.

Przytoczone wyniki podsumujmy w formie następującego twierdzenia:

Twierdzenie *Niech K' będzie podklasą klasy skończonych, jedno-generowanych algebr Heytinga nie zawierającą algebr $\mathcal{R}_3$ i $\mathcal{R}_5$. Wówczas wszystkie algebry klasy K' są zanurzalne w dowolną przestrzeń metryczną w sobie gęstą X. Algebry $\mathcal{R}_3$ i $\mathcal{R}_5$ są zanurzalne w przestrzeń X wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią niespójną.*

Ponadto, dla każdego $n \neq 3, 4$ i dla dowolnego zbioru otwartego i gęstego P przestrzeni X istnieje zanurzenie φ algebry $\mathcal{R}_{2n}$ w przestrzeń metryczną w sobie gęstą X, takie że $\varphi(\star_{2n}) = P$. Zanurzenia takie istnieja również dla algebr $\mathcal{R}_6$ i $\mathcal{R}_8$ wtedy i tylko wtedy, gdy, dodatkowo, każdy podzbiór otwarty i gęsty przestrzeni X jest sumą dwóch rozłącznych zbiorów regularnie otwartych.

Bibliografia

[1] McKinsey M.C.C., Tarski A., *The algebra of topology* Annals of Mathematics 45 (1944), 141–151.

[2] Połacik T., *Propositional quantification in the monadic fragment of intuitionistic logic*, ukaże się w Journal of Symboloc Logic.

[3] Rasiowa H, Sikorski R., *Mathematics of Metamathematics*, PWN, Warszawa, 1963.