Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka VI, Częstochowa 1999

Ł–rozstrzygalność pewnego trójwartościowego systemu

Krystyna Piróg–Rzepecka

Uwagi wstępne

Artykuł dotyczy pewnego systemu rachunku zdań skonstruowanego w pracy [5]. Należy on do licznej klasy systemów nazywanych w literaturze *systemami nonsense–logics*.

Pierwsze badania nad systemami nonsense–logics prowadzone były w latach czterdziestych XX–ego wieku przez S. C. Kleene'go [7] i D. Boczwara [2]. Nieco później zagadnieniami tymi zajęli się logicy skandynawscy: S. Halldén [4], L. Åqvist [1] i K. Segerberg [12]. Z inicjatywy i pod kierunkiem naukowym profesora J. Słupeckiego badania nad opracowaniem logicznej teorii wyrażeń tracących sens podjęły między innymi K. Piróg–Rzepecka i K. Hałkowska.

Głównym celem pierwszych twórców systemów nonsense–logics była analiza antynomii logiki i teorii mnogości. Celem, dla którego skonstruowane zostały systemy W ([10]) oraz systemy $S, S^{\vdash}, S^{*}$ ([5]) było podanie logicznych podstaw, na których mogłyby być budowane teorie matematyczne, zawierające terminy zdefiniowane warunkowo.

W pracy tej przedstawimy dalsze wyniki dotyczące systemu S^{*}. Przypomnimy najpierw rozważania stanowiące podstawę intuicyjną do określenia tego systemu oraz jego konstrukcję.

Już w matematyce szkolnej określa się wiele funkcji w zbiorze liczb rzeczywistych, których formalna definicja ma postać definicji warunkowej (por. [14]). Ogólna postać definicji warunkowej symbolu funkcyjnego f o jednym argumencie jest następująca:

$$\psi(x) \Rightarrow [y = f(x) \Leftrightarrow \Phi(x, y)].$$

Warunkiem istnienia i jedyności dla definicji o tym schemacie jest warunek, że implikacja

$$\psi(x) \Rightarrow \bigvee_{y}{}_{1} \Phi(x, y)$$

jest twierdzeniem systemu matematycznego, do którego należy dana definicja.
Przykładami takich definicji są wyrażenia:

$$x \geq 0 \Rightarrow (y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y \geq 0 \wedge y^2 = x),$$

$$x > 0 \Rightarrow (y = \lg x \Leftrightarrow 10^y = x), \quad \text{gdzie} \quad x, y \in R.$$

Wyrażenia zdaniowe, w których występują symbole funkcyjne określone definicjami warunkowymi tracą sens dla pewnych wartości zmiennych w nich występujących, to znaczy, że nie są ani prawdziwe ani fałszywe. Zbiór wartości zmiennej x, dla których dane wyrażenie nie traci sensu nazywamy jego *obszarem określoności,* a zbiór wartości, dla których wyrażenie to jest spełnione *obszarem prawdziwości.*

Rozważmy wyrażenia złożone zbudowane z wyrażeń zdaniowych, w których występują symbole funkcyjne określone definicjami warunkowymi.

(1) $\lg(x+2) > 0 \vee \frac{1}{x+1} > 0,$

(2) $\lg(x+2) > 0 \wedge \frac{1}{x+1} > 0,$

(3) $\sim [\lg(x+2) > 0].$

W sposób oczywisty przyjmuje się, że obszarem określoności wyrażenia (2) jest zbiór $\{x \in R : x > -2 \wedge x \neq -1\}$, a wyrażenia (3) zbiór $\{x \in R : x > -2\}$. Natomiast w przypadku wyrażenie (1) można przyjąć, że:

I Obszarem określoności alternatywy jest część wspólna obszarów określoności jej członów (analogicznie jak w przypadku koniunkcji).

II Obszarem określoności alternatywy jest suma (teoriomnogościowa) obszarów określoności jej członów.

Stanowisko I przedstawione jest przez autorki w pracach [10] (system W) i w [5] (systemy $S, S^{\vdash}, S^*$). Stanowisko II zajmują autorzy prac [6] i [15].

Systemy $S, S^{\vdash}$ i S^* określone są przez rodzinę matryc o różnej ilości wartości i wartości wyróżnionych. Aby wyjaśnić sens intuicyjny tych wartości, rozważmy dowolną teorię matematyczną T_D, w której występuje definicja warunkowa funkcji jednej zmiennej. Przyjmujemy, że T jest teorią matematyczną nadbudowaną nad węższym rachunkiem kwantyfikatorów z identycznością i funkcjami oraz nad klasyczną teorią mnogości. Teoria T_D jest otrzymana z teorii T przez dołączenie definicji warunkowych funkcji jednej zmiennej. Każdemu wyrażeniu systemu T_D przyporządkowana jest para uporządkowana $\langle X, Y\rangle$ podzbiorów X, Y uniwersum teorii T_D. Pierwszy element tej pary jest obszarem określoności wyrażenia, któremu ta para jest przyporządkowana, drugi – obszarem prawdziwości, tzn. że zbiór X jest zbiorem tych elementów, dla których rozważane wyrażenie nie traci sensu, a zbiór Y – zbiorem tych wszystkich elementów, które spełniają dane wyrażenie. Zbiór Y jest więc podzbiorem zbioru X.

Wyrażenie, któremu przyporządkowana jest para $\langle X, Y\rangle$, traktujemy jako wyrażenie prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy $X = Y$. Wprowadzone w teorii T_D pojęcie spełniania różni się od spełniania w „zwykłym" znaczeniu.

Przykładami wartości zmiennej x, które spełniają wyrażenie

(4) $$x > -2 \wedge x \neq 1 \Rightarrow \lg(x+2) > 0 \vee \frac{1}{x-1} > 0$$

arytmetyki liczb rzeczywistych, są liczby 3 i 5. Natomiast liczba $-1,5$ nie spełnia wyrażenia (4), gdyż spełnia poprzednik implikacji i nie spełnia jej następnika. Wyrażenia (4) *nie spełnia również* liczba 1, gdyż *nie* spełnia jego poprzednika, a następnik traci sens dla tej liczby. W tym ostatnim przypadku liczba 1 spełnia w znaczeniu „zwykłym" wyrażenie (4).

Oczywiście wyrażenie teorii T_D zaliczamy do wyrażeń prawdziwych tej teorii wtedy i tylko wtedy, gdy $X \subset Y$. Ponieważ Y musi być zawarte w X, warunkiem koniecznym i wystarczającym prawdziwości wyrażenia teorii T_D jest równość $X = Y$.

Z uwag tych wynika, że wartościami matryc systemów $S, S^{\vdash}$ i S^* są pary uporządkowane $\langle X, Y\rangle$ podzbiorów niepustego zbioru V, Spełniające warunek: $Y \subset X$. Wartościami wyróżnionymi są pary o równych elementach. Określając matryce tych systemów (por. [5]) autorka posługuje się algebrami warunkowymi. Matryce tych systemów otrzymuje się z odpowiedniej algebry warunkowej przez dołączenie do niej zbioru wartości wyróżnionych.

1 System S^* – określony za pomocą matrycy

Przyjmujemy, że wszystkimi zmiennymi zdaniowymi systemu S^* są symbole

(1) $$p, q, p_1, q_1, \ldots$$

funktorami są

(2) $$\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, *,$$

z których cztery pierwsze są dwuargumentowe, dwa ostatnie – jednoargumentowe.

Literą $\mathcal{F}_{S^*}$ oznaczamy zbiór wszystkich formuł poprawnie zbudowanych systemu S^*. Dowolne formuły należące do zbioru $\mathcal{F}_{S^*}$ oznaczamy literami $\alpha, \beta, \ldots$.

Definicja 1.1 *Matrycą $\mathfrak{M}_V^*$ systemu S^* wyznaczoną przez dowolny zbiór $V \neq \emptyset$ jest układ*

$$\langle M_V^*, N_V^*, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, * \rangle,$$

gdzie

$$M_V^* = \{\langle X, Y \rangle \in 2^V \times 2^V : Y \subset X\},$$

$$N_V^* = \{\langle X, Y \rangle \in M_V^* : XY\}$$

oraz funkcje $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, *$ matrycy $\mathfrak{M}_V^*$ określone są dla dowolnych elementów $\langle X_1, Y_1 \rangle, \langle X_2, Y_2 \rangle$ zbioru M_V^* następującymi równościami:

$$\begin{aligned}
\langle X_1, Y_1 \rangle \vee \langle X_2, Y_2 \rangle &= \langle X_1 \cap X_2, (Y_1 \cup Y_2) \cap X_1 \cap X_2 \rangle, \\
\langle X_1, Y_1 \rangle \wedge \langle X_2, Y_2 \rangle &= \langle X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2 \rangle, \\
\langle X_1, Y_1 \rangle \Rightarrow \langle X_2, Y_2 \rangle &= \langle X_1 \cap X_2, (Y_1' \cup Y_2) \cap X_1 \cap X_2 \rangle, \\
\langle X_1, Y_1 \rangle \Leftrightarrow \langle X_2, Y_2 \rangle &= \langle X_1 \cap X_2, (Y_1' \cup Y_2) \cap (Y_1 \cup Y_2') \cap X_1 \cap X_2 \rangle, \\
\neg \langle X_1, Y_1 \rangle &= \langle X_1, Y_1' \cap X_1 \rangle, \\
* \langle X_1, Y_1 \rangle &= \langle V, X_1 \rangle.
\end{aligned}$$

Funkcje matrycy $\mathfrak{M}_V^*$ oznaczone są za pomocą takich samych symboli jak funktory systemu S^*, co nie powinno prowadzić do nieporozumień. Funkcje $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ są definiowalne za pomocą funkcji $\vee, \wedge$ i $\neg$ i spełniają równości:

$$\begin{aligned}
\langle X_1, Y_1 \rangle \Rightarrow \langle X_2, Y_2 \rangle &= \neg \langle X_1, Y_1 \rangle \vee \langle X_2, Y_2 \rangle, \\
\langle X_1, Y_1 \rangle \Leftrightarrow \langle X_2, Y_2 \rangle &= (\neg \langle X_1, Y_1 \rangle \vee \langle X_2, Y_2 \rangle) \wedge \\
&\quad \wedge (\langle X_1, Y_1 \rangle \vee \neg \langle X_2, Y_2 \rangle).
\end{aligned}$$

Niech odwzorowanie $v : \{p_1, p_2, \ldots\} \to M_V^*$ będzie wartościowaniem w matrycy $\mathfrak{M}_V^*$. Przyjmujemy zwykłą definicję zbioru $E(\mathfrak{M}_V^*)$ wyrażeń prawdziwych matrycy $\mathfrak{M}_V^*$.

Definicja 1.2 $\alpha \in E(\mathfrak{M}_V^*)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wartościowania v spełniony jest warunek, że $v(\alpha) \in N_V^*$.*

Definicja 1.3 *Wyrażenie $\alpha \in \mathcal{F}_{S^*}$ jest tautologią systemu S^* wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in E(\mathfrak{M}_V^*)$ dla każdego niepustego zbioru V.*

Szczególnym przypadkiem omówionej matrycy jest matryca trójwartościowa, wyznaczona przez zbiór V jednoelementowy. Niech $V = \{a\}$. Wówczas $M_V^* = \{\langle V, V \rangle, \langle V, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \emptyset \rangle\}$. Kładąc $\langle V, V \rangle = 1$, $\langle V, \emptyset \rangle = 0$, $\langle \emptyset, \emptyset \rangle = -1$ otrzymujemy $\mathfrak{M}_3^* = \langle M_3^*, N_3^*, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, * \rangle$, gdzie $M_3^* = \{1, 0, -1\}$, $N_3^* = \{1, -1\}$.

Funkcje matrycy $\mathfrak{M}_3^*$ określone są następującymi tabelkami:

$\vee$	1	0	-1
1	1	1	-1
0	1	0	-1
-1	-1	-1	-1

$\wedge$	1	0	-1
1	1	0	-1
0	0	0	-1
-1	-1	-1	-1

$\Rightarrow$	1	0	-1
1	1	0	-1
0	1	1	-1
-1	-1	-1	-1

$\Leftrightarrow$	1	0	-1
1	1	0	-1
0	0	1	-1
-1	-1	-1	-1

	$\neg$
1	0
0	1
-1	-1

	$*$
1	1
0	1
-1	0

Lemat 1.1 *Dla każdego zbioru $V \neq \emptyset$ mamy $E(\mathfrak{M}_V^*) = E(\mathfrak{M}_3^*)$.*

Dowód. Ponieważ algebra $\mathfrak{M}_3^*$ jest podalgebrą algebry $\mathfrak{M}_V^*$, więc zachodzi inkluzja $E(\mathfrak{M}_V^*) \subset E(\mathfrak{M}_3^*)$.

W celu udowodnienia inkluzji odwrotnej załóżmy nie wprost, że dla pewnego $V \neq \emptyset$ istnieje takie wyrażenie $\alpha \in \mathcal{F}_{S^*}$, że $\alpha \in E(\mathfrak{M}_3^*)$ i $\alpha \notin E(\mathfrak{M}_V^*)$. Istnieje więc takie wartościowanie g w matrycy $\mathfrak{M}_V^*$, że $g(\alpha) \notin N_V^*$. Istnieją zatem takie zbiory X_1, Y_1, że $g(\alpha) = \langle X_1, Y_1 \rangle$ i $X_1 \not\subset Y_1$. Dla pewnego elementu $a \in V$ spełnione są warunki: $a \in X_1, a \notin Y_1$. Określamy homomorfizm h matrycy $\mathfrak{M}_V^*$ w matrycy $\mathfrak{M}_3^*$ dla każdego $\langle X, Y \rangle \in \mathfrak{M}_V^*$ następująco:

$$h(\langle X, Y \rangle) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } a \in X \wedge a \in Y, \\ 0, & \text{gdy } a \in X \wedge a \notin Y, \\ -1, & \text{gdy } a \notin X. \end{cases}$$

Odwzorowanie to jest homomorfizmem algebry $\mathfrak{M}_V^*$ w podalgebrę $\mathfrak{M}_3^*$ takim, że $h(g(\alpha)) = 0$. Superpozycja $h \circ g$ jest więc homomorfizmem algebry formuł $\mathcal{F}_{S^*}$ w podalgebrę $\mathfrak{M}_3^*$ takim, że $(h \circ g)(\alpha) = 0$. Stąd $\alpha \notin E(\mathfrak{M}_3^*)$. Dowód, że system S^* posiada adekwatną matrycę trójwartościową został więc zakończony.

2 System S^* aksjomatyczny i jego związek z systemem Halldéna

Aksjomatami systemu S^* jest dowolny układ aksjomatów klasycznego rachunku zdań oraz następujące wyrażenia:

A1. $*p \Leftrightarrow *\neg p$,

A2. $*(p \wedge q) \Leftrightarrow *p \wedge *q$,

A3. $p \Rightarrow *p$.

Regułami pierwotnymi systemu S^* są: reguła podstawiania (RP^*) w zwykłym sformułowaniu oraz reguła odrywania dla implikacji (RO^*). Podajemy schematy tych reguł.

$$(RP^*)\quad \frac{\beta \in Sb(\{\alpha\}) \qquad \vdash \alpha}{\vdash \beta} \qquad\qquad (RO^*)\quad \frac{\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \qquad \vdash (*\beta \Rightarrow *\alpha) \qquad \vdash \alpha}{\vdash \beta}$$

Symbolem T_{S^*} oznaczamy zbiór konsekwencji aksjomatów systemu S^* wynikających z nich na podstawie przyjętych reguł pierwotnych.

W pracy [4] S. Halldén buduje systemy nonsense–logics rachunku zdań i kwantyfikatorów. Podstawowy dla badań Halldéna jest system C rachunku zdań opisany w monografiach [5] i [10] zarówno za pomocą matrycy jak też przez podanie aksjomatów i reguł.

W pracy [5] K. Hałkowska dowodzi, że matryce systemów $\mathfrak{M}_3^*$ i M_C (matryca Halldéna) są izomorficzne. Stąd oraz z definicji 1.3 i z lematu 1.1 wynika, że zbiory tautologii systenów S^* i C są równe. Prawdziwe jest więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1 $E(\mathfrak{M}_3^*) = E(M_C)$.

Również w pracy [5] wykazany jest związek zachodzący między zbiorami tez systemów S^* i C. W aksjomatycznym systemie Halldén przyjmuje regułę podstawiania analogiczną do reguły podstawiania klasycznego rachunku zdań oraz regułę odrywania słabszą od zwykle przyjmowanej. Dla sformułowania jej potrzebne jest pojęcie zmiennej zamkniętej i zmiennej otwartej zdefiniowane w metajęzyku. w pracy [5] K. Hałkowska przyjmuje w systemie S^* układ aksjomatów odpowiadający układowi aksjomatów Halldéna i dowodzi w pewnym znaczeniu równoważności tych systemów. Korzysta również z udowodnionego w pracy [4] twierdzenia o pełności aksjomatycznego systemu C.

Stąd oraz z twierdzenia 2.1 wynika, że system S^* jest pełny. Prawdziwe jest więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2 $T_{S^*} = E(\mathfrak{M}_3^*)$.

Z wyniku tego skorzystamy dowodząc dalszych własności systemu S^*.

3 Ł–rozstrzygalność systemu S^*

Posługując się terminologią pracy [13] sformułujemy definicję pojęcia systemu Ł–rozstrzygalnego wprowadzonego przez J. Łukasiewicza (por. [8]).

System jest Ł–rozstrzygalny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:

(I) *Zbiory wszystkich jego formuł uznanych (tez systemu) i wszystkich jego formuł odrzuconych są rozłączne;*

(II) *Każda formuła danego systemu bądź jest formułą uznaną, bądź odrzuconą.*

Zbiorem wszystkich formuł odrzuconych danego systemu jest najmniejszy zbiór formuł, którego elementami są wszystkie aksjomaty odrzucone i który jest zamknięty ze względu na reguły odrzucania tego systemu. Przyjmujemy, że jedynym aksjomatem odrzuconym systemu S^* jest formuła

$\overline{A1}$. $p \vee *q$.

Regułami odrzucania systemu S^* są dwie reguły: reguła odrzucania przez podstawianie i reguła odrzucania przez odrywanie o następujących schematach:

$$(RP^*)^{-1} \quad \frac{\beta \in Sb(\{\alpha\}) \qquad \dashv \beta}{\dashv \alpha} \qquad\qquad (RO^*)^{-1} \quad \frac{\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \qquad \vdash (*\beta \Rightarrow *\alpha) \qquad \dashv \beta}{\dashv \alpha}$$

W myśl reguły pierwszej formuła jest odrzucona, gdy pewne jej podstawienie jest odrzucone. W myśl reguły drugiej: jeżeli implikacje $(\alpha \Rightarrow \beta)$ i $(*\beta \Rightarrow *\alpha)$ są tezami systemu S^* i następnik β jest formułą odrzuconą, to poprzednik α jest odrzucony.

Definicja 3.1 *Zbiór $T^{-1}_{S^*}$ wszystkich formuł odrzuconych systemu S^* jest najmniejszym zbiorem, którego elementem jest aksjomat $\overline{A1}$ i który jest domknięty ze względu na przyjęte w systemie S^* reguły odrzucania.*

Warunki (I) i (II) podane w definicji systemu Ł–rozstrzygalnego mają wówczas następującą postać:

(I') $T_{S^*} \cap T^{-1}_{S^*} = \emptyset$,

(II') $T_{S^*} \cup T^{-1}_{S^*} = \mathcal{F}_{S^*}$.

Lemat 3.1 *Zbiory tez i formuł odrzuconych systemu S^* są rozłączne.*

Dowód. Aksjomat $\overline{A1}$ nie należy do zawartości matrycy $E(\mathfrak{M}^*_3)$. Natychmiastowy jest też dowód, że jeśli formuła $(\alpha \Rightarrow \beta)$ i $(*\beta \Rightarrow *\alpha)$ są elementami zbioru $E(\mathfrak{M}^*_E)$ i formuła β nie jest elementem tego zbioru, to również formuła α do niego nie należy. Również natychmiastowy jest wniosek, że jeśli pewne podstawienie formuły α nie należy do zbioru $E(\mathfrak{M}^*_3)$, to formuła α też nie należy do tego zbioru. Zbiory $T_{S^*}^{-1}$ i $E(\mathfrak{M}_3^*)$ są więc rozłączne. Stąd oraz z twierdzenia 2.2 wynika, że spełniony jest warunek (I'). Wniosek ten kończy dowód lematu.

Aby wykazać, że system S^* spełnia również warunek (II') udowodnimy pomocniczy lemat techniczny.

Lemat 3.2 *Niech $v : At \to M_3^*$ będzie dowolnym wartościowaniem zmiennych zdaniowych, zaś r i s niech będą dowolnymi różnymi zmiennymi zdaniowymi. Niech $w : At \to M_3^*$ będzie dowolnym wartościowaniem takim, że $w(r) = 0$ oraz $w(s) = -1$ oraz niech $e : At \to \mathcal{F}_{S^*}$ będzie następującym podstawieniem*

$$\bigwedge_{p\in At} e(p) = \begin{cases} r \vee \neg r, & gdy \quad v(p) = 1, \\ r \vee \neg v, & gdy \quad v(p) = 0, \\ s, & gdy \quad v(p) = -1. \end{cases}$$

Wówczas dla dowolnej formuły $\alpha \in \mathcal{F}_{S^*}, h^w(h^e(\alpha)) = h^v(\alpha)$.

Dowód indukcyjny tego lematu dla systemu S nad którym nadbudowany jest system S^* podany jest w pracy [15]. Ograniczę się do podania dowodu w przypadku, gdy $\alpha = *\beta$.
$h^v(\alpha) = h^v(*\beta) = *(h^v(\beta)) = *(h^w(h^e(\beta))) = h^w(*(h^e(\beta))) = h^w(h^e(*\beta)) = h^w(h^e(\alpha))$. h^w i h^v są homomorfizmami języka $(At, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, *)$ w algebrę $\mathfrak{M}_3^* = (\{1, 0, -1\}, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, *)$.

Lemat 3.3 *Suma zbiorów formuł uznanych i odrzuconych systemu S^* jest zbiorem wszystkich jego wyrażeń poprawnie zbudowanych.*

Dowód. Niech α będzie dowolną formułą systemu S^*, która nie jest jego tezą. Stąd i z twierdzenia 2.2 wynika, że $\alpha \notin E(\mathfrak{M}_3^*)$. Dla pewnego wartościowania $v \colon At \to M_3^*$ mamy więc $h^v(\alpha) = 0$.

Niech $e : At \to \mathcal{F}_{S^*}$ będzie podstawieniem formuły α zdefiniowanym następująco:

$$\bigwedge_{p\in At} e(p) = \begin{cases} p \vee \neg p, & \text{gdy} \quad v(p) = 1, \\ p \wedge \neg p, & \text{gdy} \quad v(p) = 0, \\ q, & \text{gdy} \quad v(p) = -1. \end{cases}$$

Jedynym wartościowaniem w matrycy $\mathfrak{M}_3^*$, które falsyfikuje formułę $p \vee *q$ jest $w(p) = 0$ i $w(q) = -1$. Na podstawie lematu 3.2 dla dowolnego wartościowania, a więc i dla v zachodzą równości $h^v(\alpha) = h^w(h^e(\alpha)) = 0$. Spełniony jest więc warunek

(1) $(h^e(\alpha) \Rightarrow (p \vee *q)) \in E(\mathfrak{M}_3^*)$.

Łatwo pokazać, że również spełniony jest warunek

(2) $(*(p \vee *q) \Rightarrow *h^e(\alpha)) \in E(\mathfrak{M}_e^*)$.

Formuły występujące w (1) i (2) są więc tezami systemu S^*. Na podstawie reguły odrzucania przez odrywanie wnioskujemy stąd, że formuła $h^e(\alpha)$ jest odrzucona. Z reguły odrzucania przez podstawienie wynika, że odrzuconą jest formuła α. Spełniony jest więc warunek (II'). Wniosek ten kończy dowód lematu.

Twierdzenie 3.1 *System S^* jest Ł–rozstrzygalny.*

Twierdzenie wynika z lematów 3.1, 3.2 i z definicji systemu Ł–rozstrzygalnego.

4 System S^* w wersji inwariantnej i jego Ł–rozstrzygalność

W wersji inwariantnej systemu S^*, zamiast aksjomatów bierzemy schematy aksjomatów i stosujemy wyłącznie regułę odrywania dla implikacji (RO^*) i regułę odrzucania dla implikacji $(RO^*)^{-1}$. Reguły te są regułami strukturalnymi (por. [11]).

Na możliwość wyeliminowania reguły odrzucania przez podstawienie w pewnym systemie trójwartościowym zwrócił uwagę A. Zbrzezny (por. [15]) i ([3]).

W celu zdefiniowania zbioru aksjomatów odrzuconych wersji inwariantnej systemu S^*, podamy definicje kilku pojęc pomocniczych.

Definicja 4.1

$$\bigwedge_{X \subset \mathcal{F}_{S^*}} (\neg X = \{\alpha : \bigvee_{\beta \in X} (\alpha = \neg\beta)\}.$$

Definicja 4.2

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathcal{F}_{S^*}} Dis(\alpha) = \begin{cases} Dis(\beta) \cup Dis(\gamma), & \text{gdy } \alpha = \beta \vee \gamma, \\ \{\alpha\}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Definicja 4.3 *Formułę $\alpha \in \mathcal{F}_{S^*}$ nazywamy* **alternatywą elementarną** *wtedy i tylko wtedy, gdy $Dis(\alpha) \subset At \cup \neg At$.*

Definicja 4.4

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathcal{F}_{S^*}} Con(\alpha) = \begin{cases} Con(\beta) \cup Con(\gamma), & \text{gdy } \alpha = \beta \wedge \gamma, \\ \{\alpha\}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Definicja 4.5 *Formułę $\alpha \in \mathcal{F}_{S^*}$ nazywamy* **koniunkcją elementarną** *wtedy i tylko wtedy, gdy $Con(\alpha) \subset At \cup \neg At$.*

Przy pomocy wprowadzonych pojęć zdefiniujemy zbiór aksjomatów odrzuconych.

Definicja 4.6 *Aksjomatem odrzuconym wersji inwariantnej systemu S^* jest dowolne wyrażenie postaci*

$$\neg\beta \vee *\gamma$$

takie, że $At(\beta) \cap At(\gamma) = \emptyset$, przy czym β jest koniunkcją elementarną, w której każda zmienna występuje co najwyżej jeden raz, zaś γ jest alternatywą elementarną spełniającą warunek $Dis(\gamma) = At(\gamma) \cup \neg At(\gamma)$. Natomiast $*\gamma$ jest alternatywą, której każdy składnik należący do $Dis(\gamma)$ jest poprzedzony funktorem $*$.

Zbiór wszystkich aksjomatów odrzuconych jest zbiorem obliczalnym. Ponadto z definicji powyższej wynika, że żaden z tych aksjomatów nie należy do zawartości matrycy $\mathfrak{M}_3^*$. Warunek (I') definicji systemu Ł–rozstrzygalnego jest więc spełniony. Aby udowodnić, że spełniony jest również warunek (II') wystarczy udowodnić, że

$$\mathcal{F}_{S^*} \backslash T_{S^*} \subset T_{S^*}^{-1},$$

gdzie $T_{S^*}^{-1}$ jest zbiorem wszystkich wyrażeń otrzymanych z aksjomatów odrzuconych (Def. 4.6) przy pomocy reguły $(RO^*)^{-1}$.

Załóżmy, że $\alpha \notin T_{S^*}$. Z twierdzenia 2.2 wynika, że $\alpha \notin E(\mathfrak{M}_3^*)$. Istnieje zatem taki homomorfizm h_1 języka $(\mathcal{F}_{S^*}, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, *)$ w algebrę $(\{1, 0, -1\}, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, *)$, że $h_1(\alpha) = 0$. Załóżmy, że $At(\alpha) = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$. Rozważmy dwa przypadki:

$$(a) \bigvee_{p \in At(\alpha)} h_1(p) \neq -1; \qquad (b) \bigwedge_{p \in At(\alpha)} h_1(p) = -1.$$

Niech $X = \{p \in At(\alpha) : h_1(p) = 1\}, Y = \{p \in At(\alpha) : h_1(p) = 0\}$, $Z = \{p \in At(\alpha) : h_1(p) = -1\}$. Z założenia (a) wynika, że $X \cup Y \neq \emptyset$ i $X \cap Y = \emptyset$. Rozważmy dowolne wyrażenie β, w którym każda zmienna zdaniowa występuje co najwyżej jeden raz i które spełnia warunek: $Con(\beta) = X \cup \neg Y$. Wyrażenie takie istnieje, ponieważ $X \cup Y \neq \emptyset$. Niech ponadto γ będzie dowolnym wyrażeniem o własnościach:

$$Dis(\gamma) = \begin{cases} Z \cup \neg Z, & \text{gdy } Z \neq \emptyset, \\ \{q \vee \neg q\}, & \text{gdy } Z = \emptyset \text{ i } q \notin At(\alpha). \end{cases}$$

Wyrażenie $\neg\beta \vee *\gamma$ jest więc aksjomatem odrzuconym, gdyż

(1) $At(\beta) \cap At(\gamma) = \emptyset$,

(2) β jest koniunkcją elementarną, w której każda zmienna występuje co najwyżej jeden raz,

(3) γ jest alternatywą elementarną taką, że $Dis(\gamma) = At(\gamma) \cup \neg At(\gamma)$,

(4) $*\gamma$ jest alternatywą, w której każdy element należący do $Dis(\gamma)$ jest poprzedzony funktorem $*$.

Wyrażenie $\alpha \Rightarrow (\neg\beta \vee *\gamma)$ jest tautologią, ponieważ każde wartościowanie, które falsyfikuje formułę $(\neg\beta \vee *\gamma)$ w matrycy $\mathfrak{M}_3^*$ jest zgodne z wartościowaniem na zmiennych formuły α i jednocześnie ją falsyfikuje. Wobec twierdzenia 2.2 mamy

(5) $\vdash (\alpha \Rightarrow (\neg\beta \vee *\gamma))$.

Z przyjętych warunków dotyczących wyrażeń β i $*\gamma$ wynika, że również spełniony jest warunek $(*(\neg\beta \vee *\gamma) \Rightarrow *\alpha) \in E(\mathfrak{M}_3^*)$, czyli

(6) $\vdash (*(\neg\beta \vee *\gamma) \Rightarrow *\alpha)$.

Na podstawie reguły odrzucania przez odrywanie wnioskujemy, że formuła α jest odrzucona.

Wniosek ten uzyskaliśmy w przypadku (*a*), tzn. przy założeniu, że istnieje homomorfizm h_1 języka $(\mathcal{F}_{S^*}, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, *)$ w algebrę $(\{1, 0, -1\}, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, *)$, że $h_1(\alpha) = 0$ i $\bigvee_{p \in At(\alpha)} h_1(p) = -1$. Wówczas $X = Y = \emptyset$. W sytuacji tej przyjmujemy, że β jest dowolną zmienną $p \notin At(\alpha)$. Jest oczywiste, że formuła $\neg\beta \vee *\gamma$ jest aksjomatem odrzucania. Łatwo pokazać, że przy tych założeniach także spełnione są warunki (5) i (6). Przy założeniu, że $\alpha \notin T_{S^*}$ wykazaliśmy więc, że $\alpha \in T_{S^*}^{-1}$. Prawdziwe jest zatem twierdzenie.

Twierdzenie 4.1 *Trójwartościowy system S^* w wersji inwariantnej jest L-rozstrzygalny.*

Bibliografia

[1] L. Åqvist, *Reflections on the Logic of Nonsense,* Theoria, vol. XXVIII, 1962, Part 2, 138–158.

[2] D. A. Boczwar, *Ob odnom trechznacznom isczislenii i jego primenenii k anlizu paradoksow klasiczeskogo rasszirennogo funkcjonalnogo usczislenia* (ros.), Matematiczeskij sbornik, T.I (46), N. 2, 1938.

[3] G. Bryll, *Metody odrzucania wyrażeń,* Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1996.

[4] S. Halldén, *The Logic of Nonsense,* Uppsala Universitets Årsskrift, 1949: 9.

[5] K. Hałkowska, *Algebry związane z teoriami zawierającymi definicje warunkowe,* OTPN–PWN, Warszawa–Wrocław 1979.

[6] K. Hałkowska, A. Zając, *O pewnym trójwartościowym systemie rachunku zdań,* Acta Universitatis Wratislaviensis, No 1017, Prace Filozoficzne LVII (Logika 13), Wrocław 1988, 41–49.

[7] S. c. Kleene, *Introduction to Metamathematics,* North–Holland Publishing, Amsterdam 1952.

[8] J. Łukasiewicz, *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane,* PWN, Warszawa 1961.

[9] G. Malinowski, *Logiki wielowartościowe,* PWN, Warszawa 1990.

[10] K. Piróg-Rzepecka, *Systemy nonsense-logics,* OTPN–PWN, Warszawa–Wrocław 1977.

[11] W. A. Pogorzelski, *Klasyczny rachunek zdań,* PWN, Warszawa 1973.

[12] K. Segerberg, *A Contribution to Nonsense-Logics,* Theoria, XXXI, 1965, 199–217.

[13] J. Słupecki, G. Bryll, U. Wybraniec-Skardowska, *Theory of Rejected Propositions, part I,* Studia Logica 29, 1971, 75–123.

[14] J. Słupecki, K. Hałkowska, K. Piróg-Rzepecka, *Logika i teoria mnogości,* wyd. 2. PWN, Warszawa 1994.

[15] A. Zbrzezny, *Systemy logiczne związane ze strukturami częściowymi,* Praca doktorska - promotor: K. Hałkowska, Uniwersytet Wrocławski 1990.

[16] A. A, Zinoviev, *Filozoficzne problemy logiki wielowartościowej,* PWN, Warszawa 1963.

Streszczenie

Krystyna Piróg–Rzepecka

Ł–rozstrzygalność pewnego trójwartościowego systemu

Artykuł ten dotyczy logiki zdaniowej S^* przedstawionej w pracy [5]. Rozważana logika zawiera funktory:

$$\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, *,$$

z których cztery pierwsze są dwuargumentowe, dwa ostatnie – jednoargumentowe.

Logika S^* posiada adekwatną matrycę trójelementową, której uniwersum jest zbiór $\{1, 0, -1\}$, wartościami wyróżnionymi są elementy 1 i -1, zaś działania odpowiadające funktorom określone są następującymi tabelkami:

$\vee$	1	0	-1
1	1	1	-1
0	1	0	-1
-1	-1	-1	-1

$\wedge$	1	0	-1
1	1	0	-1
0	0	0	-1
-1	-1	-1	-1

$\Rightarrow$	1	0	-1
1	1	0	-1
0	1	1	-1
-1	-1	-1	-1

$\Leftrightarrow$	1	0	-1
1	1	0	-1
0	0	1	-1
-1	-1	-1	-1

	$\neg$
1	0
0	1
-1	-1

	$*$
1	1
0	1
-1	0

Aksjomatami systemu S^* jest dowolny układ aksjomatów klasycznego rachunku zdań oraz następujące wyrażenia:

A1. $*p \Leftrightarrow *\neg p$,

A2. $*(p \wedge q) \Leftrightarrow *p \wedge *q$,

A3. $p \Rightarrow *p$.

Regułami pierwotnymi systemu są: reguła podstawiania w zwykłym sformułowaniu oraz reguła odrywania dla implikacji o następującym schemacie:

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \qquad *\beta \Rightarrow *\alpha \qquad \alpha}{\beta}$$

Zbiór tez systemu aksjomatycznego S^* pokrywa się ze zbiorem tautologii tej logiki.

W pracy podany jest dowód Ł–rozstrzygalności systemu S^*, tzn., że system ten spełnia następujące warunki:

(I) Zbiory wszystkich jego formuł uznanych (tez systemu) i wszystkich jego formuł odrzuconych są rozłączne;

(II) Każda formuła danego systemu bądź jest formułą uznaną, bądź odrzuconą.

Dowód Ł–rozstrzygalności dotyczy również wersji inwariantnej.

Summary

Krystyna Piróg–Rzepecka

Ł–decidability for some three–valued system

This paper concerns the propositional logic S^* which has been introduced in the paper [5].

The logic S^* is defined in the sentential language which involves the following symbols:

$$\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, *,$$

from which the first four are two–argument and the last two– one–argument.

The systems S^* is defined axiomatically by any axiom system for the classical propositional logic augmented with the following list of axioms:

A1. $*p \Leftrightarrow *\neg p,$

A2. $*(p \wedge q) \Leftrightarrow *p \wedge *q,$

A3. $p \Rightarrow *p.$

Furthemore, as the primitive rules for this system we have:

— rule for substitution (in the ordinary formulation),

— rule Modus Ponens (detachement) for implication given by the following scheme:

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha \Rightarrow \beta \\ *\beta \Rightarrow *\alpha \\ \alpha\end{array}}{\beta}$$

We prove that the system S^* has an adequate (in the weak sense) three–element matrix. Let $\mathfrak{M}$ be the matrix for which the set $\{1, 0, -1\}$ forms its universe and $\{1, -1\}$ is the set of the designated elements. The operations of $\mathfrak{M}$ which correspond to the above symbols are defined by the following tables:

$\vee$	1	0	−1
1	1	1	−1
0	1	0	−1
−1	−1	−1	−1

$\wedge$	1	0	−1
1	1	0	−1
0	0	0	−1
−1	−1	−1	−1

$\Rightarrow$	1	0	−1
1	1	0	−1
0	1	1	−1
−1	−1	−1	−1

$\Leftrightarrow$	1	0	-1
1	1	0	-1
0	0	1	-1
-1	-1	-1	-1

	$\neg$
1	0
0	1
-1	-1

	$*$
1	1
0	1
-1	0

It is shown that the set of logical theses of S^* coincides with the content of $\mathfrak{M}$, i.e. with the set of all formulas valid in $\mathfrak{M}$. We also prove that the systems S^* is Ł–decidable, i.e. S^* satisfies the following conditions:

(1) The set of all provable and all rejected formulas of S^* are disjoint;

(2) Each formula of the language od S^* ie either provable or rejected (in S^*).

Krystyna Piróg–Rzepecka
Uniwersytet Opolski
Instytut Matematyki
ul. Oleska 48
45 - 052 Opole